EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

16e JAARGANG 1940, Nr. 4.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

☞ Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het ☜
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

De redactie vestigt de aandacht op blz. 38 van afl. I; zij hoopt dat velen hun bevindingen meedelen over de tafel in vier decimalen.

PROSPECTUS

BEKNOPTE MEETKUNDE

DOOR

P. WIJDENES
AMSTERDAM

EERSTE DEEL
NEGENDE DRUK
138 NIEUWE FIGUREN

TWEEDE DEEL
ZEVENDE DRUK
119 NIEUWE FIGUREN



PRIJS MET GRADENBOOG
EN OVERZICHT GEC. I *f* 1.60
II *f* 1.70

VRAAG PRESENT-EXEMPL. AAN BIJ DEN UITGEVER OF DEN SCHRIJVER

P. NOORDHOFF N.V. — 1939 — GRONINGEN-BATAVIA

VERKRIJGBAAR IN DE BOEKHANDEL. • IN NED. O.-INDIË UIT VOORRAAD LEVERBAAR DOOR N.V. NED. IND. UITG. MIJ. NOORDHOFF-KOLFF, LAAN HOLLE 7, BATAVIA C

INHOUD VAN DEEL I.

INHOUD VAN DEEL II.

Verder vraagstukken ter herhaling, nl.: M.U.L.O. diploma A, M.U.L.O. diploma B, Eerste H.B.S. 3-j. c. te Amsterdam, Over opp. en inhouden.

BIJ DE BEKNOPTE MEETKUNDE.

Op de scholen met een beperkt wiskunde-program, dus op die, **waar het onderwijs tevens eindonderwijs is**, wordt de meetkunde vooral onderwezen om de vormende waarde, om het denkvermogen van de leerlingen te scherpen, om hun hersenen te wetten; dat is het hoofddoel van het gehele schoolonderwijs in de wiskunde; voor de school toch is wiskunde een geheel van stellingen met de daarop rustende bewerkingen, die gerangschikt zijn in logische orde, zodat steeds het nieuwe rust op het bekende en als gevolg daarvan onomstotelijk kan worden vastgesteld. Met dit doel voor ogen is geen enkel vak van het lager en middelbaar onderwijs daartoe zo bij uitstek geschikt als de meetkunde . . . . men drijve dit echter niet al te zeer op de spits; de grote grief tegen ons elementair meetkunde-onderwijs, nl. **dat het absoluut bezijden het leven staat,** is maar al te juist; een leerling van de H. B. S. 3. j. c., die slechts de gewone vlakke meetkunde heeft geslikt, weet weinig of niets van wat hem in het leven te pas komt, nl. van de nodige inhouds- en oppervlakteberekeningen. Ik heb daarom gebroken met wat tot heden als de normale stof gold en heb de inhoud uitgebreid met de berekeningen van oppervlakten en inhouden; het is veel nuttiger, dat hij de inhoud van een bergruimte, van een terreinverhoging, van een uitgraving, van een emmer kan uitrekenen, dan dat hij kan bewijzen: „Als men uit het snijpunt der diagonalen van een koordenvierhoek loodlijnen op de zijden neerlaat, dan zijn de voetpunten de hoekpunten van een raäklijnenvierhoek", om er maar eens een te nemen. Het is beter, dat hij weet, hoeveel m² plaatijzer er gaat aan een ronde reclamezuil, afgedekt door een kegel, dat hij kan opgeven, hoeveel m² verf- of stucadoorwerk ergens aan zit, dan dat hij de „verdubbelformule" kan afleiden.

„Dus nog uitgebreid de gewone leerstof?" Neen, volstrekt

niet; **veel wat onnut was, heb ik weggelaten;** waarom in alle bijzondere, opzettelijk ineengedraaide gevallen te bewijzen, dat twee driehoeken congruent of gelijkvormig zijn? Waarom constructies als $x = \sqrt[4]{abcd}$, waarom verdubbel-, halveer- en andere formules (deze hebben slechts historische waarde), waarom de *s*-formules voór de deellijnen, waarom ontzettend veel onpractisch sleurgoed en . . . . nog veel sterker, waarom de volgorde zó, dat het onderwijs telkens hokt en zó, dat een zelfde zaak twee keer voorkomt?

„Wat bedoelt U met dat laatste?" vraagt de lezer. — 'k Zal het U zeggen:

't Hokt 1) bij de congruentie van driehoeken, als men die *reeds bij de eerste oefening* uitbreidt tot: „basis, verschil van de basishoeken en som van de opstaande zijden"; dit slag heb ik veel verderop pas genomen bij de constructies. **Men loopt vast** 2) in de 2e klas bij de behandeling van de evenredigheid van lijnstukken en de gelijkvormigheid, 't zij deze op de verouderde, 't zij op de juiste manier behandeld wordt. [1]) Geen wonder: de onderlinge vergelijking van twee figuren (de eenvoudige congruentie van driehoeken uitgesloten) is veel lastiger dan de beschouwing van één figuur, b.v. wat betreft de oppervlakte . . . . die pas in de 3e klas komt, of de hoeken in een cirkel, die ook pas in de 3e komen. Dan, **'t loopt spaak.** 3) in het laatst van de 2e klas met de berekening van lijnstukken in driehoeken, bij U als bij mij, vroeger, thans en als we die niet wat verschuiven, ook in 't vervolg . . . . Waar wij er zijn om de leerlingen, acht ik het gewenst hun deze stof niet in de 2e klas toe te dienen, maar in de 3e, waar men door de meerdere vaardigheid in de algebra, met name in de wortelvormen, betere resultaten krijgt. — Ook zei ik: **omdat een zelfde zaak tweemaal voorkomt:** ik bedoel daarmee de stellingen van de rechthoekige driehoek en de evenredigheid van lijnstukken in de cirkel; ook de theorie van de gelijkvormigheid bij rechtlijnige figuren en bij de cirkel; dit begrip later en dan in zijn geheel ontwikkelen is veel beter. —

[1]) De juiste manier is in 1927 ook toegelaten verklaard voor het „M.U.L.O".

Verder heb ik gepoogd om veel dingen eenvoudiger te behandelen; zo heb ik de traditionele vijf congruentie-gevallen door samenvoeging van de beide eerste tot *vier* teruggebracht; het eerste luidt dan: „Twee driehoeken zijn congruent, als ze gelijk hebben één zijde en twee hoeken." Korter en beter dan de beide gevallen, waartussen geen wezenlijk onderscheid bestaat en waarbij dan bovendien volkomen overeenkomst is met de *vier* gevallen van gelijkvormigheid.

Met dat al moet ik er op wijzen, dat dit boek dezelfde moderne geest ademt, als het grotere leerboek, dat meer is voor hen, die langer en degelijker de Meetkunde beoefenen, met name geldt dit voor de behandeling van de cirkel, de meetkundige plaatsen en de gelijkvormigheid; de bestudering van dit werk is door de **betere rangschikking van de stof en de grote vereenvoudiging** van enkele zaken (zie de oppervlakten, inhouden, de regelmatige veelhoeken, de opp. van de cirkel enz.) veel meer vruchtdragend dan van andere werken; **overal heb ik er voor gezorgd, dat de leerling niet optornt tegen de stof, omdat die voor zijn ontwikkeling te vroeg valt.**

De inhoud vindt men heel eenvoudig op de beide blaadjes met de kleine figuurtjes hierbij; begonnen met de M.U.L.O.-boekjes, voortgezet bij het grotere leerboek, is het me een niet genoeg te waarderen hulpmiddel bij het onderwijs gebleken en daarom heb ik mijn uiterste best gedaan om dit overzicht zo duidelijk mogelijk te doen zijn.

Met dit hulpmiddel krijgt de meetkunde voor de scholieren vastheid en grond. Leraren, die menen, dat de jongens van zelf de zaken onder de knie krijgen door „veelvuldig gebruik", hebben het geheel mis; daarvoor is de tijd te kort, het inzicht nog te gebrekkig en het aantal vakken te groot.

Het werk, zoals het hier ligt, is geschikt voor H. B. S. met 3 j. c., voor M. U. L. O.-scholen, Zeevaart- en Kweekscholen, voor Meisjesscholen, Technische scholen, enz.

Van de beide deeltjes van deze

BEKNOPTE MEETKUNDE

heeft men voor het **M.U.L.O.-diploma A** nodig *Deel I geheel* (blz. 58—60 overslaan); met inbegrip van oppervlakte en inhoud van lichamen; de herhaling achterin dient als altijd als vindplaats van proefwerksommen.

Van Deel II zijn nodig blz. 10—66 en blz. 82—105; wel is waar zijn in het programma niet genoemd omtrek en oppervlakte van de cirkel, maar die moeten toch gekend worden, evenals inhoud en oppervlakte van cylinder, kegel en bol; deze onderwerpen worden nl. gevraagd onder Rekenen; men zal goed doen de behandeling daarvan in dit boekje te volgen.

Alzo met inbegrip van oppervlakte- en inhoudberekening in het geheel 95 + 57 + 24 bladzijden met 138 + 119 figuren; hieronder zijn begrepen de vraagstukken; het geheel heeft dus geen overmatige hoeveelheid stof *en de beide boekjes zijn juist van pas voor scholen met een beperkt programma.*

Voor het **M.U.L.O.-diploma B** heeft men beide deeltjes nodig; mij dunkt, de eenvoudige theorie over de meetkundige plaatsen moet men in een paar lessen ook maar behandelen.

☛ **De oplossingen en antwoorden** zijn voor gebruikers van de Beknopte Meetkunde gratis te bekomen bij den schrijver (Amsterdam Zuid, Jac. Obrechtstraat 88) of bij den uitgever.

lingen worden afgeleid, dat ook de overige elementen der gegeven drievlakshoeken congruent zijn.

Stelling 34. Twee drievlakshoeken zijn congruent als de drie zijden van den eenen congruent zijn met de drie zijden van den anderen. (ZZZ).

Bewijs als in de vlakke meetkunde.

Stelling 35. Twee drievlakshoeken zijn congruent als de drie hoeken van den eenen congruent zijn met de drie hoeken van den anderen. (HHH).

Bewijs met behulp van stelling 34 en den pooldrievlakshoek.

§ 18. Stelling 36. Tegenover twee congruente zijden van een drievlakshoek staan congruente hoeken.

Bewijs als in de vlakke meetkunde.

Stelling 37. Tegenover congruente hoeken van een drievlakshoek staan congruente zijden.

Bewijs als in de vlakke meetkunde, of uit stelling 36 met behulp van den pooldrievlakshoek.

Terminologie analoog aan die uit de vlakke meetkunde: gelijkbeenige drievlakshoek, basis, basishoeken, enz.

§ 19. De stelling der vlakke meetkunde, dat een buitenhoek van een driehoek grooter is dan elk der niet-aanliggende binnenhoeken, geldt voor drievlakshoeken niet, zooals blijkt uit het voorbeeld van een drievlakshoek met drie rechte zijden en drie rechte hoeken. Op deze stelling berusten de bewijzen van de planimetrische congruentiegevallen ZHH en ZZH; deze gelden voor drievlakshoeken dan ook niet in ongewijzigden vorm.

Stelling 38. Twee drievlakshoeken zijn congruent als twee zijden van den eenen congruent zijn met twee zijden van den anderen, de hoeken tegenover een paar congruente zijden congruent, en die tegenover het andere paar niet supplementair zijn. (ZZH).

(Zijn laatstbedoelde hoeken wel supplementair, dan *kunnen* de drievlakshoeken congruent zijn).

Ondersteld. De hoeken ATC en A′T′C′ zijn congruent.
de hoeken ATB en A′T′B′ evenzoo.
de tweevlakshoeken (A,TB,C) en (A′,T′B′,C′) evenzoo.

de tweevlakshoeken (A,TC,B) en (A′,T′C′B′) zijn niet supplementair.

Gestelde. Drievlakshoek TABC is congruent met drievlakshoek T′A′B′C′.

Bewijs. Volgens axioma XVI is in het halve vlak (TB,C) eene halve lijn TC″ zoodat de hoeken BTC″ en B′T′C′ congruent zijn; dan zijn de drievlakshoeken TABC″ en T′A′B′C′ congruent volgens ZHZ (+). Dan zijn de hoeken ATC″ en A′T′C′ congruent, dus in verband met het onderstelde zijn de hoeken ATC″ en ATC congruent. Waren de halve lijnen TC″ en TC verschillend, dan was wegens stelling 36 tweevlakshoek (A,TC,B) congruent met (A,TC″,C), dus dan waren (A,TC,B) en (A,TC″,B) supplementair. Maar uit (+) volgt tevens, dat (A′,T′C′,B′) en (A,TC″,B) congruent zijn, dus dan zouden ook (A,TC,B) en (A′,T′C′,B′) supplementair zijn. Dit is in strijd met het onderstelde, dus moeten de halve lijnen TC″ en TC samenvallen, zoodat de betrekking (+) overgaat in de congruentie der drievlakshoeken TABC en T′A′B′C′.

Opmerking. Als de bedoelde hoeken supplementair en congruent, dus recht zijn, is congruentie mogelijk, maar niet noodzakelijk, zooals uit voorbeelden blijkt.

Stelling 39. Twee drievlakshoeken zijn congruent, als twee hoeken van den eenen congruent zijn met twee hoeken van den anderen, de zijden tegenover een paar congruente hoeken congruent, en die tegenover het andere paar congruente hoeken niet supplementair zijn. (HHZ).

(Zijn de laatstbedoelde zijden wel supplementair en congruent, dan *kunnen* de drievlakshoeken congruent zijn).

Bewijs. Uit stelling 38 met behulp van den pooldrievlakshoek.

F. Eigenschappen van niet-congruente figuren.

§ 20. Stelling 40. De som van twee zijden van een drievlakshoek is grooter dan de derde zijde.

Ondersteld̲e. TABC is een drievlakshoek.

Gestelde. Hoek ATC + hoek ATB is grooter dan hoek BTC.

Bewijs. Is hoek BTC niet grooter dan hoek CTA en hoek ATB elk afzonderlijk, dan is de stelling direct duidelijk. Is hoek BTC grooter dan elk der genoemde hoeken afzonderlijk, dan redeneert men als volgt.

Volgens axioma XVI is in het halve vlak (TB,C) eene halve lijn TD, zoodat de hoeken BTD en BTA congruent zijn, deze ligt dan binnen hoek BTC. Neemt men op de halve lijnen TB en TC punten B en C, dan snijdt de lijn BC de halve lijn TD in een punt D. Volgens axioma X is op halve lijn TA een punt A, zoodat $\overline{TA} \cong \overline{TD}$; wij trekken AB en AC. Nu zijn de driehoeken TBA en TBD congruent (ZHZ), waaruit volgt $\overline{BA} \cong$ BD; in driehoek ABC is volgens eene planimetriestelling $\overline{BC} - \overline{BA}$ kleiner dan $\overline{AC}$, dus nu is ook $\overline{BC} - \overline{BD}$ kleiner dan $\overline{AC}$,

dus $\overline{DC}$ kleiner dan $\overline{AC}$;

Tevens is $\overline{TC}$ congruent met $\overline{TC}$

$\overline{TD}$ congruent met $\overline{TA}$,

en hieruit leidt men af, volgens eene stelling der vlakke meetkunde dat hoek CTD is kleiner dan hoek CTA.

Hieruit volgt

hoek CTD + hoek DTB is kleiner dan hoek CTA + hoek BTA

of hoek CTB is kleiner dan hoek CTA + hoek BTA.

Hiermede is de stelling bewezen.

Stelling 41. De som der zijden van een drievlakshoek is kleiner dan $4R$.

Bewijs. Zij halve lijn TB′ het verlengde van halve lijn TB; nu is volgens stelling 40

hoek ATC kleiner dan hoek ATB′ + hoek B′TC

hoek ATC kleiner dan $2R$ — hoek ATB + $2R$ — hoek BTC

hoek ATC + hoek ATB + hoek BTC kleiner dan $4R$.

Stelling 42. De som der hoeken van een drievlakshoek ligt tusschen $2R$ en $6R$.

Bewijs. Noem de hoeken van den drievlakshoek A,B,C, de zijden van den pooldrievlakshoek a',b',c', dan ligt volgens stelling 41

$$a' + b' + c' \text{ tusschen } 0 \text{ en } 4R.$$

Maar volgens stelling 28 is $a' = 2R - A$, enz., dus ligt

$$2R - A + 2R - B + 2R - C \text{ tusschen } 0 \text{ en } 4R.$$

Hieruit volgt:

$$A + B + C \text{ is kleiner dan } 6R,$$

$$2R \text{ is kleiner dan } A + B + C.$$

Hiermede is de stelling bewezen.

§ 21. Stelling 43. Zijn twee hoeken van een drievlakshoek verschillend, dan staat tegenover den grootsten dier hoeken eene grootere zijde dan tegenover den kleinsten.

Ondersteld e. Tweevlakshoek (B,TA,C) is grooter dan tweevlakshoek (A,TB,C).

Gestelde. Hoek BTC is grooter dan hoek ATC.

Bewijs. Volgens stelling 19 is er een vlak ATD, zoodat de tweevlakshoeken (D,TA,B) en (A,TB,C) congruent zijn; zij TD de doorsnede hiervan met BTC. Dan is volgens stelling 37 hoek ATD congruent met hoek BTD. In drievlakshoek TACD is volgens stelling 40:

hoek ATD + hoek CTD grooter dan hoek ATC,
dus ook hoek BTD + hoek CTD grooter dan hoek ATC,
of hoek BTC grooter dan hoek ATC.

Hiermede is de stelling bewezen.

Stelling 44. Zijn twee zijden van een drievlakshoek verschillend, dan staat tegenover de grootste dier zijden een grootere hoek dan tegenover de kleinste.

Deze stelling kan met behulp van de theorie van den pooldrievlakshoek uit stelling 43 worden afgeleid, of worden bewezen met behulp van een gesloten systeem.

§ 22. Stelling 45. Als van twee drievlakshoeken twee paar zijden congruent zijn, en de ingesloten hoek van den eersten is grooter dan die van den tweeden, dan is de derde zijde van den eersten grooter dan de derde zijde van den tweeden.

Onderstelde. Hoek ATB is congruent met hoek A'T'B'
Hoek BTC is congruent met hoek B'T'C'.
Tweevlakshoek (A,TB,C) is grooter dan tweevlakshoek (A'T'B',C').

Gestelde. Hoek CTA is grooter dan hoek C'T'A'.

Bewijs. Volgens stelling 19 is er een half vlak (TB,X) zoo, dat tweevlakshoek (C,TB,X) congruent is met tweevlakshoek (C',T'B',A') en volgens axioma XVI is hierin eene halve lijn | TA" zoo, dat hoek BTA" congruent is met hoek BTA. Zij BTY het vlak, dat den tweevlakshoek (A,TB,A") middendoor deelt; dit heeft met BTA het punt T gemeen, dus eene lijn TD. Dan zijn de drievlakshoek TBDA en TBDA" congruent (Z.H.Z.) dus de hoeken DTA

en DTA″ ook. Toepassing van stelling 40 in drievlakshoek TADC geeft

hoek ATD + hoek CTD is grooter dan hoek CTA
hoek A″TD + hoek CTD is grooter dan hoek CTA
hoek CTA″ is grooter dan hoek CTA

en daar hoek CTA″ congruent is met hoek CTA′, is ook hoek CTA′ grooter dan hoek CTA.

Stelling 46. Het omgekeerde van stelling 45; kan worden bewezen met behulp van de theorie van het gesloten systeem.

G. Congruentie in het algemeen.

§ 23. Evenals in de vlakke meetkunde kan in de stereometrie het begrip congruentie algemeen worden gedefinïeerd voor willekeurige figuren. Men definieert twee congruente puntverzamelingen dan als twee verzamelingen, tusschen welker punten eene een-een-verwantschap bestaat, en wel zoo, dat het lijnstuk, dat twee punten der eene verzameling tot eindpunten heeft, congruent is met het lijnstuk, dat de toegevoegde punten der andere verzameling tot eindpunten heeft. Congruentie van lijnstukken is dan grondbegrip. Bij deze wijze van behandeling moet men aantoonen, dat de algemeene congruentiedefinitie de vroeger gegeven bijzondere definities als bijzondere gevallen bevat. Wij gaan hierop echter niet in.

Als een bijkomstig voordeel van bovenstaanden leergang beschouw ik, dat het bekende bewijs van Stelling 7 nu niet meer op zich zelf staat, maar met de bewijzen van de stellingen 12 en 13 eene toepassing wordt van eene zekere methode: het toepassen der congruentie van niet coplanaire driehoeken.

Ondervinding van eenige jaren heeft mij geleerd, dat deze leergang geen moeilijkheden biedt voor de leerlingen der vierde klasse eener hoogere burgerschool B.

HET GETALBEGRIP IN HET NIEUWE LEERPLAN *)

DOOR

Dr. JOH. H. WANSINK.

M. d. V. De uitnodiging van Uw Bestuur om op deze bijeenkomst te spreken over: „Het getalbegrip in het nieuwe leerplan" heb ik met gemengde gevoelens aanvaard. Aan de ene kant trok het onderwerp me vanwege de fundamentele betekenis, die ik aan het getalbegrip voor ons gehele Reken- en Stelkunde-onderwijs toeken, in sterke mate aan. Aan de andere kant zag ik toch enigszins tegen inwilliging van Uw verzoek op, omdat ik vreesde, dat het wel een zeer zware taak zou worden een vergadering als deze een uur lang te interesseren voor een zo alledaagse materie als de verschillende rekenkundige bewerkingen in de diverse getallenstelsels voor ons vakmensen zijn. Bovendien is het onderwerp sinds de oprichting onzer Vereniging reeds bij herhaling aan de orde geweest. In de eerste vergadering in 1926 heeft de Heer Dijksterhuis bij de inleiding over het rapport Beth-Dijksterhuis, dat de ontwikkeling van het getalbegrip onder haar desiderata voor ons Middelbaar Onderwijs opnam, ook aan de bedoelingen der Commissie t.o.v. dit onderwerp enige woorden gewijd. Ons Bestuur heeft in een brief aan Dr. E. Jensema in 1926 o.m. gewaarschuwd tegen te hoge eisen, die men op dit gebied aan de leerlingen zou kunnen stellen. In 1932 heeft de Heer Beeger over de invoering der imaginaire getallen gesproken, en in 1936 is bij de bespreking van het gewijzigd ontwerp-leerplan de motie Buzeman aangenomen, waarin onze Vereniging hare instemming betuigt met het voorgestelde Rapport, voorzover dit leidt tot verdieping van het inzicht der leerlingen; in het bijzonder juicht ze het opnemen van de infinitesimaalrekening en de systematische

---

*) Voordracht, gehouden op de jaarvergadering van „Wimekos", op 28 December 1939 te Amsterdam.

behandeling van het getal toe. Voorts herinner ik U aan de lezingen, door de samenwerkende Verenigingen om de twee jaar georganiseerd. Zo sprak in 1928 de Heer B e t h over: „De ontwikkeling van het getalbegrip bij het Middelbaar en Voorbereidend Hoger Onderwijs." Naar aanleiding van deze stellig nog zeer onvolledige opsomming (ik zou er nog een literatuur-lijstje uit Euclides aan kunnen toevoegen!) zou er grond kunnen ontstaan voor de vrees, dat we over dit onderwerp zo langzamerhand reeds uitgepraat zouden zijn. Toch is dit, dunkt me, niet het geval! Hoeveel reeds eerder uitgesproken gedachten er èn in mijn inleiding èn bij de discussie opnieuw naar voren gebracht zouden mogen worden, onze gezamenlijke taak is thans een geheel andere dan voor 1937 het geval kon zijn. Toen ging het erom, wensen te uiten, die het komende program nog zouden kunnen beinvloeden, thans gaat het erom na te gaan, hoe we het nieuwe program zullen hebben te interpreteren.

M. d. V. Wanneer we de leerlingen in de eerste klasse onzer H.B.S. krijgen, hebben ze reeds een belangrijke fase in de ontwikkeling van het getalbegrip achter de rug. Ze kennen de vier hoofdbewerkingen met gehele getallen en met gewone en tiendelige breuken. Ze zijn thuis in wat ze later het gebied der niet-negatieve, rationale getallen zullen kunnen noemen.

Hoewel het niet tot mijn taak behoort de ontwikkeling van het getalbegrip gedurende de L. S.-periode na te gaan, lijkt het me toch gewenst enkele punten naar voren te brengen.

In de leidraad van de Derde Hoofdinspectie, die in de kringen van het Lager Onderwijs een ruime belangstelling geniet, zie ik het doel van het rekenonderwijs op de L. S. in zes punten samengevat, waarvan het eerste luidt: *het aanbrengen van het getalbegrip.*

Het getalbegrip wordt al tellend geleerd. Dit tellen is het fundament van geheel het rekenonderwijs. Waarin bestaat nu dit telprocédé?

De kinderen krijgen twee rijen rangnummers te leren, een klankenrij:

een, twee, drie, vier, ...

en een rij van geschreven symbolen:

1, 2, 3, 4, ...

De associatie tussen woordgetal en cijfergetal moet nu op de L. S. worden vastgelegd. Dit is nog géén rekenen, maar een kwestie van leren lezen!

Het opnoemen van de elementen der klankenrij in een vaste volgorde noemen we tellen. Maar dit formele tellen wordt voor de leerlingen eerst tot een materiëel, zinvol tellen, zodra ze de rij der rangnummers gebruiken om het „aantal eenheden ener hoeveelheid" te gaan vaststellen. Bij dit tellen wordt een (1,1) correspondentie tot stand gebracht tussen de elementen van de rij der rangnummers en de elementen der hoeveelheid. Het laatste getal uit de rij der rangnummers, dat men bij deze (1,1) correspondentie gebruikt, is tevens het symbool voor het aantal eenheden der hoeveelheid.

Eerste doel van het rekenonderwijs is nu een langs aanschouwelijke weg tot stand brengen van een innige associatie tussen woordgetal, cijfergetal, en aantal. Zijn we daarin geslaagd, dan zeggen we, dat we het getalbegrip bij de kinderen hebben aangebracht.

In de zes lagere-schooljaren leren nu de leerlingen met de getallen rekenen, d.w.z. ze leren optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Eén van de moeilijkheden, waarop de leerlingen voortdurend stuiten, is de noodzakelijkheid, te abstraheren van de bijzondere eigenschappen der voorwerpen, die als eenheden gebruikt of gedacht worden, te abstraheren van de aard der eenheden.

Het benoemde getal is voor de leerlingen reeds een abstractie, ze moeten echter leren rekenen met onbenoemde getallen, dat is voor hen een abstractie van een abstractie, en zolang ze deze niet beheersen, zijn ze de rekenkunst niet voldoende machtig.

Op de H.B.S. volgt nu een abstractie van nog hogere orde: het abstraheren van de bijzondere waarde, die een getal heeft ingevolge zijn plaats in de rij der natuurlijke getallen.

Ik geloof niet, dat de hieraan verbonden moeilijkheden voor het Reken- en Stelkunde-onderwijs onzer aanvangsklasse er tastbaar door zullen verminderen, nu het programma voor het Toelatingsexamen van 19 Maart 1938 toestaat, dat bij dit examen de in de Wiskunde gangbare verkorte schrijfwijze bij de oplossing der denkvraagstukken is toegestaan. Ik geloof niet en ik hoop niet, dat deze bepaling tot gevolg zal hebben, dat een deel van het stelselmatig letterrekenen bij het rekenprogram van de L. S. getrokken

wordt. De L. S. heeft m.i. haar plicht meer dan voldoende volbracht, als ze haar leerlingen het rekenen leert zonder het letterrekenen erbij. Ze heeft daarmee haar handen vol! Letterrekenen zonder dat de eigenschappen der bewerkingen den leerlingen worden duidelijk gemaakt, voert tot onbegrepen manupulaties en bevordert machinaal, gedachtenloos cijferen en vercijferen. Eerst bij het Voortgezet Onderwijs kan het letterrekenen tot zijn recht komen.

Ik ben nu genaderd tot mijn eigenlijke onderwerp, de plaats, die het getalbegrip inneemt in het leerplan onzer scholen, de functie, die het getalbegrip vervult in ons wiskunde-onderwijs. Ik zal me daarbij een zekere beperking opleggen: ik zal niet spreken over de bouw van ons decimale positie-systeem, dat onze leerlingen toch ook dienen te begrijpen, niet over het limietbegrip, dat o.a. in de theorie van het irrationale getal een rol speelt, niet over het begrip onnauwkeurig getal, dat voor de toegepaste rekenkunde van belang is, en vrijwel niet over de toepassingen van het niet-rationale getal in Meetkunde en Natuurkunde.

Wat schrijft het nieuwe program ons voor?

Voor klasse I hebben we de ontwikkeling van het getalbegrip van natuurlijk getal tot rationaal getal te onderwijzen; de uitbreidingen van het getalbegrip met het getal nul, met de negatieve en met de gebroken getallen worden uitdrukkelijk genoemd;

voor klasse II staat de titel „Uitbreiding van het getalbegrip" na het worteltrekken, zodat hiermee alleen de voorlopige invoering der irrationale getallen bedoeld kan zijn;

voor klasse III staat vermeld: gebroken en negatieve exponenten; hier heeft dus een uitbreiding van het machtsbegrip plaats, die stellig ook onder de uitbreiding van het getalbegrip valt;

voor klasse IV en V staat alleen vermeld: „Herhaling en uitbreiding van het getalbegrip". Geheel duidelijk lijkt me de bedoeling van deze titel niet. Mijn persoonlijke opvatting is, dat het woord herhaling slaat op het reële getal en het woord uitbreiding op het complexe getal. Maar expliciet staat dit er niet en het is, dunkt me, een nog niet opgelost probleem, of behandeling der complexe getallen op onze scholen krachtens het thans vigerende program al of niet verplicht is. Officiële uitspraken die mijn gevoel van onzekerheid in deze kunnen wegnemen, heb ik niet tot mijn beschikking.

	DEFINITIES DER REKENKUNDIGE BEWERKINGEN IN VERSCHILLENDE GETALLENSTELSELS						
	som	verschil	product	quotiënt	macht	wortel	logarithme
voor twee natuurlijke getallen m en n	$m+n$ *I* gedef.	$m-n$ *I* voorw. gedef. ($m > n$)	$n \times m$ *I* gedef.	$m : n$ *I* voorw. gedef. (m = een n-vd.)	m^n *I* gedef.	$\sqrt[n]{m}$ *I II* voorw. gedef. (m = een $n$de macht)	$\overset{n}{\log}\, m$ *I III* voorw. gedef. (m = een macht van n)
voor twee rationale getallen a en b	$a+b$ *I* gedef.	$a-b$ *I* gedef.	$a \times b$ *I* gedef.	$a : b$ *I* gedef. tenzij $b = 0$	a^b *III* voorw. gedef. a^n: onvoorw. ged. a^b: ged. voor $a > 0$	$\sqrt[b]{a}$ *III* voorw. gedef. $\sqrt[n]{a}$: gedef. v. $a \geqq 0$ $\sqrt[b]{a}$: gedef. v. $a > 0$	$\overset{b}{\log}\, a$ *III* voorw. gedef. ($a > 0$, $b > 0$)
voor twee reële getallen α en β	$\alpha+\beta$ *II IV* gedef.	$\alpha-\beta$ *II IV* gedef.	$\alpha \times \beta$ *II IV* gedef.	$\alpha : \beta$ *II IV* gedef. tenzij $\beta = 0$	α^β *III IV* voorw. gedef. α^n: onvoorw. ged. α^β: ged. voor $\alpha > 0$	$\sqrt[\beta]{\alpha}$ *III IV* voorw. gedef. $\sqrt[n]{\alpha}$: gedef. v. $\alpha \geqq 0$ $\sqrt[\beta]{\alpha}$: gedef. v. $\alpha > 0$	$\overset{\beta}{\log}\, \alpha$ *III IV* voorw. gedef. ($\alpha > 0$, $\beta > 0$)
voor twee complexe getallen A en B	$A+B$ *V* gedef.	$A-B$ *V* gedef.	$A \times B$ *V* gedef.	$A : B$ *V* gedef. tenzij $B = (0, 0)$	A^B *V* niet gedef. A^n: onvoorw. ged. A^b en A^β: niet gedef.	$\sqrt[B]{A}$ *V* niet gedef. $\sqrt[n]{A}$: onvoorw. ged. (n-waardig) $\sqrt[b]{A}$ en $\sqrt[\beta]{A}$: niet gedef.	$\overset{B}{\log}\, A$ niet gedef.

Op de vergadering van 23 Oct. 1937 heeft de Heer Van Andel meegedeeld, dat op het schriftelijk eindexamen voorlopig niet over het getalbegrip zal worden gevraagd, en dat naar zijn toenmalige mening er ook nooit over gevraagd zal worden. Het gevolg hiervan is, dat een eventueel onderzoek naar de kennis, die een leerling t.a.v. het complexe getal bezit, in elk geval tot het mondeling examen beperkt zal blijven, waardoor er ruimschoots gelegenheid zal zijn met de opvatting van den leraar rekening te houden.

De Heer Van Andel deelde voorts nog mede, dat een behandeling van het complexe vlak in sommige gevallen mogelijk is, maar nooit voor het gehele onderwijs is voor te schrijven. Ook deze mededeling geeft nog geen definitieve uitspraak t.a.v. de vraag, of behandeling van de complexe getallen op onze scholen nu al of niet *verplicht* is. Ik zal het daarom zeer op prijs stellen, M. d. V., als hieromtrent ter gelegener tijd zekerheid zou kunnen worden verkregen.

Vast staat in elk geval, dat we na 1937 geen ruimer getallenstelsel hebben te onderwijzen, dan voor 1937 reeds het geval was.

Betekent nu het nieuwe program in geen enkel opzicht t.a.v. het getalbegrip een verzwaring?

Voor mij betekent het getalbegrip aan onze leerlingen bijbrengen het volgende:

a. het rationale, het reële en het complexe getal funderen op het bekend onderstelde natuurlijke getal;

b. de bewerkingen in deze verschillende stelsels definiëren;

c. de rekenregels voor de bewerkingen vaststellen;

d. zorg dragen, dat de leerlingen de bewerkingen technisch beheersen.

Nu lijkt het me toe, als we de gehele wordingsgeschiedenis van het program 1937 in aanmerking nemen, dat het stellig de bedoeling is, dat we in de toekomst bij de behandeling der door mij genoemde punten *a, b, c* een iet of wat grotere strengheid betrachten, dan voorheen het geval was.

Juist de vraag, welke mate van strengheid dat nu moet zijn, levert me de voornaamste rechtvaardiging van het wederom ter discussie stellen van het getalbegrip in onze Vereniging.

Ik hoop, M. d. V., dat U me thans de gelegenheid zult willen schenken, een uiteenzetting te geven van de wijze, waarop ik het

getalbegrip gewoon ben te behandelen, of zou wensen te behandelen. Ik hoop, dat deze uiteenzetting straks een basis zal geven voor discussie. Om deze te vergemakkelijken, bent U allen reeds in het bezit gesteld van een overzicht van de uitbreidingen van het getalbegrip door de vijf schooljaren heen. Ik heb van elk der bewerkingen aangegeven, of ze in de diverse getallenstelsels op onze scholen al of niet gedefiniëerd worden, dan wel of ze voorwaardelijk gedefiniëëerd worden. In het laatste geval staan er enige voorwaarden bij, die voor het gedefiniëerd kunnen worden, voldoende zijn.

Van te voren wil ik nog gaarne opmerken, dat mijn methodische beschouwingen geenszins bedoelen aan te geven, *hoe het moet,* maar slechts *hoe het kan,* en wat mij gewenst lijkt. Van de methodische vrijheid, die wij bij ons onderwijs gelukkig hebben, zullen we, zeker bij een materie als deze, steeds een dankbaar gebruik maken, waardoor ieder deze stof kan behandelen op de wijze, die haar of hem het beste ligt. Als ik me dus in hoofdzaak bepaal tot een toelichting mijner eigen methode, betekent dit a priori geenszins een miskenning van de kwaliteiten die in andere methoden voor anderen verborgen kunnen zijn.

Ik ben gewoon in de eerste drie maanden, die onze leerlingen op de H.B.S. doorbrengen, het getalbegrip niet wezenlijk uit te breiden, maar me te beperken tot het natuurlijke getal. Alle beschikbare uren worden, op enkele uren voor hoofdrekenen en practisch rekenen na, daaraan besteed. Rekenkunde wordt daardoor met Stelkunde in overeenstemming met de gelukkige formulering van het nieuwe leerplan tot één vak. Voor het leggen van een stevig fundament, juist wat het getalbegrip betreft, lijkt me de beperking tot het natuurlijke getal aanbevelingswaard. Willen we niet slechts technische beheersing der leerstof, maar ook enig inzicht in de samenhang der bewerkingen en in de rekenregels, die tot dusver vaak zonder voldoende inzicht werden toegepast, dan lijkt het me vrijwel ondoenlijk, om aanstonds met een ruimer stelsel dan dat der natuurlijke getallen plus nul te beginnen. Ik heb de indruk, dat er collega's zijn, die er anders over denken en die zelfs niet schromen om zo goed als terstond met de negatieve getallen te beginnen, die bij mij pas in December aan de orde komen. Dat ik dit persoonlijk ongewenst vind, komt niet, doordat ik het begrip negatief getal in September voor onze leerlingen te moeilijk zou achten en in

December niet meer, maar doordat ik het veel bezwaarlijker vind enig inzicht te verschaffen in de bewerkingen met negatieve getallen aan leerlingen, voor wie de logische samenhangen in het systeem van de natuurlijke getallen niet enigermate zijn blootgelegd, dan aan leerlingen, bij wie dit wel enigszins het geval is.

De eerste lessen worden nu gewijd aan een bespreking van de rij der natuurlijke getallen, aan de orde-relatie in deze rij en aan de definities der rekenkundige bewerkingen.

Uitdrukkelijk wordt er op gewezen, in eenvoudige taal natuurlijk:

a. dat de optelling, de vermenigvuldiging en de machtsverheffing berusten op iteratie van de Elementaire Bewerking der Rekenkunde (= de overgang van een getal op dat wat er in de getallenrij op volgt); in verband met de onbeperkte uitvoerbaarheid der E. B. volgt hieruit dan terstond de onbeperkte uitvoerbaarheid der drie genoemde rechtstreekse bewerkingen;

b. dat de overige bewerkingen gedefiniëerd kunnen worden als inverse der eerstgenoemde.

We definiëren dus resp.:

de aftrekking als het zoeken van een onbekende term;

de deling als het zoeken van een onbekende factor;

de worteltrekking als het zoeken van een onbekend grondtal;

de logarithmeneming als het zoeken van een onbekende exponent.

Het onderling verband tussen de verschillende bewerkingen is de leerlingen in enkele lessen duidelijk te maken en het toepassen der geleerde definities in cijferoefeningen is, ook waar het wortels en logarithmen betreft, een rekenkundig spel, dat geheel binnen het bevattingsvermogen der leerlingen blijkt te liggen. Ik begrijp echter, dat tal van collega's het woord wortel nog graag één jaar en het woord logarithme nog graag twee jaar lang onuitgesproken wensen te laten.

Reeds spoedig ontstaat uit de beperkte uitvoerbaarheid der aftrekking de behoefte om de nul aan de getallen, waarmee gewerkt wordt, toe te voegen. Is dit gebeurd, dan gelukt de aftrekking $a - b$ niet alleen als $a > b$, maar ook als $a = b$.

Ik ben er van overtuigd, dat er collega's zijn, voor wie deze invoering der nul een steen des aanstoots is. „Waarom", zo zullen ze vragen, „moeten we eerst vaststellen, dat de aftrekking 6 — 6 mislukt, vervolgens de nul invoeren, om daarna te constateren, dat

nu achter 6 — 6 wel een antwoord geschreven kan worden! Een antwoord nogwel, dat de leerlingen feitelijk reeds lang kenden! Neem dan toch terstond de nul in de fundamentele getallenrij op", zo stellen ze voor, „en kies als uitgangspunt de getallenrij:

0, 1, 2, 3, 4, ..."

Dit lijkt inderdaad een acceptabele oplossing der bezwaren. Een oplossing echter, die in de praktijk van het onderwijs geen enkele moeilijkheid voor me wegneemt, maar hoogstens enkele moeilijkheden camoufleert. Ik grijp gaarne, door de nul apart in te voeren, de gelegenheid aan om op de nul de speciale aandacht te vestigen. Dit doe ik des te liever, omdat ik er me van bewust ben, dat de nul in het getallenstelsel dat we in klasse I gebruiken, zowel als in dat van klasse V een zeer uitzonderlijke positie blijft innemen. Immers, ook bij alle toekomstige uitbreidingen van het getalbegrip blijft de deling $a : 0$ onmogelijk, als $a \neq 0$, en niet ondubbelzinnig, als $a = 0$, om welke redenen we de deling door nul ongedefiniëerd laten. De invoering van een nieuw getal om de deling door nul wel mogelijk te maken, nl. door de invoering van een getal ∞ (oneindig), geeft aanleiding tot ongewenste complicaties. Ze is niet mogelijk, indien men de voorheen opgestelde rekenregels wil behouden. Zo zouden de eigenschap, dat een product nul is, zodra een der factoren nul is, alsmede de eigenschap dat $a + 1 > a$, niet meer gelden, als we het getal ∞ invoerden. Ook in de hogere klassen wordt de deling door nul dus niet toegelaten. Dit is niet in strijd met het feit, dat de leerlingen het symbool $\frac{6}{0}$ wel eens in een zinvol verband kunnen aantreffen. Immers, het zo juist genoemde symbool betekent dan niet „zes gedeeld door nul", maar: $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{6}{\delta}$, zodat het symbool zonder limietbegrip zinloos is.

Het opnemen van de nul in de rij der natuurlijke getallen zou de bijzondere plaats die aan de nul toekomt, verdoezelen. Ik wil die bijzondere plaats graag vanaf den beginne zo uitdrukkelijk mogelijk laten uitkomen. Bovendien waardeer ik de opzettelijke invoering der nul als een voorbereiding tot de latere invoering der negatieve getallen.

Reeds na enkele lessen zijn de leerlingen in staat een groot aantal

cijferoefeningen te maken met lettergetallen, nl. allerlei substitutie-oefeningen, alsmede vertalingen van rekenkundige opdrachten in het pas geleerde tekenschrift. Ik bedoel opgaven als deze:

„Vermeerder de dubbele som van de derdemachten van *a* en *b* met het kwadraat van hun verschil."

Zodra den leerlingen het verband tussen het begrip aantal eenheden ener hoeveelheid en het formele telproces helder is gemaakt, kunnen ze spoedig series opgaven maken, waarin ook benoemde lettergetallen optreden. Ik zou het betreuren, indien de wens naar een strenge theorie er toe zou leiden, dat men, onderscheid makende tussen een theoretische en een toegepaste rekenkunde, deze laatste uit onze schoolboeken ging weren. De aanschouwelijkheid van ons wiskunde-onderwijs zou er te zeer onder lijden, indien men de toepassingen der rekenkunde op de concrete dingen uit de wereld waarin we leven, achterwege ging laten. Hoe het te verklaren is, dat de uitkomsten van ons formele rekenbedrijf, waarin de getallen zich als „vrije scheppingen van den menselijken geest" aan ons voordoen, toegepast kunnen worden op de wereld der concrete dingen, laten we buiten beschouwing. Het is een probleem van kennistheoretische aard, dat ik heel gaarne laat rusten.

Straks komen de eigenschappen der bewerkingen aan de orde, maar, vóór we daar aan toe zijn, kan er reeds heel wat gedaan worden om de technische vaardigheid te ontwikkelen. De omstandigheid, dat ik niet onmiddellijk laat werken met *alle* getallen, die de leerlingen van de L. S. kennen, is voor deze technische vaardigheid geen bedreiging. Weliswaar zal de beperking die ik me heb opgelegd, maken, dat ik een uitdrukking als $\frac{1}{2}a$ uit opgaven en antwoorden heb te bannen, maar de uitdrukking $\frac{a}{2}$ is wel toelaatbaar, als *a* maar een even getal is. Wering der breuken prikkelt leerlingen èn leraar zo tot grotere attentie!

Het lijkt me voor de logische ontwikkeling van het getalbegrip een bezwaar van betekenis, dat, terwijl men de leerlingen met een bepaald getallensysteem vertrouwd wil maken, b.v. met de natuurlijke getallen, het leerboek series vraagstukken geeft, waarin een beroep gedaan wordt op kennis van een ruimer getallensysteem, b.v. dat der breuken. Dit moet wel verwarring geven! Er is geen enkel bezwaar tegen, den leerlingen een tijdlang opgaven als

8 — 12 en 8 : 3 als onmogelijk te laten kwalificeren, en wel tot op het ogenblik, dat ze voor de nieuwe getallen scherp omschreven consignes hebben gekregen. Het zich bij herhaling realiseren, dat bewerkingen met het beschikbare getallenmateriaal onuitvoerbaar zijn, is een uitstekende voorbereiding voor de straks volgende uitbreiding, waarin die onmogelijkheden zullen verdwijnen. Een soortgelijke opmerking geldt voor het onderwijs in de tweede klasse. Hier dient men er een tijdlang voor te waken, dat men den leerlingen geen benaderingen van $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ enz., leert, terwijl zij alleen nog maar rationale getallen kennen. De leerlingen moeten inzien, dat deze worteltrekkingen in het systeem der rationale getallen mislukken. Deze mislukkingen doen de functie der nieuwe getallensoort straks beter tot haar recht komen.

Het ongeduld van den leraar om toch vooral zo spoedig mogelijk *elke* omgekeerde bewerking te doen gelukken, is dunkt me de voornaamste reden, waaruit de traditionele invoering van de complexe getallen in klasse II en III verklaard moet worden, een invoering op een ogenblik, waarop de invoering evenzeer tot vertroebeling als tot verheldering van het inzicht zal kunnen bijdragen. Op de complexe getallen kom ik straks nog nader terug, op dit ogenblik is het slechts mijn bedoeling te waarschuwen voor een overijld beroep op nieuwe getallensoorten. Dit overijld beroep wekt ook de frequentie in de hand van die denkfouten, die bestaan in een dubbelzinnig gebruik van woorden. Past men eigenschappen, die in een bepaald getallensysteem zijn bewezen of plausibel zijn gemaakt, klakkeloos toe in een ruimer stelsel dan bevordert men het oncritische denken, dat we overigens door ons wiskundeonderwijs juist zozeer hopen te bestrijden!

Na ongeveer een maand ben ik toe aan een behandeling van de eigenschappen der rekenkundige bewerkingen. Mijn standpunt t.o.v. het veel omstreden probleem, wat de H.B.S. van deze eigenschappen heeft te behandelen, wil ik gaarne in een vijftal punten samenvatten.

1°. Kennis van de eigenschappen der rekenkundige bewerkingen is van fundamentele betekenis voor de wiskundige ontwikkeling onzer leerlingen; deze eigenschappen behoren tot het „systematisch geordend instrumentarium", dat we onzen leerlingen met het oog op

de technische vaardigheid, waarover ze op den duur moeten beschikken, niet mogen onthouden.

2°. Hoewel onze leerlingen vele der eigenschappen bij het rekenonderwijs op de L. S. reeds bij voortduring hebben toegepast, is het onjuist te menen, dat een meer systematische behandeling op de H.B.S. wel achterwege zou kunnen blijven. Vooral de samenhang der eigenschappen doorzien de leerlingen in den beginne nog geenszins.

3°. De grote betekenis die ik aan genoemde eigenschappen toeken, betekent volstrekt niet, dat ik alle eigenschappen der bewerkingen exact zou willen laten bewijzen. Er zijn eigenschappen, zoals $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$, die de leerlingen ook zonder „bewijs" wel leren doorzien. Onze taak is daardoor veelal geen andere, dan dat we reeds bekende waarheden in een voor het verdere wiskundeonderwijs zo practisch mogelijke vorm gieten. De leerlingen moeten de in formules uitgedrukte waarheden leren lezen. Wiskunde-onderwijs is daardoor in dit stadium voor een groot deel taalonderwijs! Memoriseren van de eigenschappen met de woorden van het boek is nooit noodzakelijk; voor de middelmatige leerlingen kan het tijdelijk een steun betekenen bij het zich eigen maken van de inhoud der eigenschappen, als het streven naar inzicht bij dit memoriseren maar op de voorgrond blijft staan.

4°. Vele der eigenschappen, die den leerlingen niet onmiddellijk duidelijk zijn, kunnen op aanschouwelijke wijze duidelijk gemaakt worden. Een aanschouwelijk bewijs of een inductief plausibel maken van een eigenschap kan vaak meer tot een juist begrip bijdragen dan enkel deductieve argumentatie. Het bezwaar, dat door het beroep op de aanschouwing de eenheid van methode verloren gaat, aanvaard ik gaarne terwille van het doel, dat niet ligt in een streng systematische opbouw der rekenkunde, maar in een op doelmatige wijze bijbrengen van die eigenschappen, die in de rekenkunde en algebra nodig blijken.

5°. Ook al is de deductieve argumentatie niet ons uitgangspunt, we mogen haar evenmin verontachtzamen. We zullen geleidelijk aan onze leerlingen eraan moeten wennen. Er zijn tal van eigenschappen, die gemakkelijk op voor kinderen bevattelijke wijze tot vorige reeds bewezen of als juist aangenomen eigenschappen en definities kunnen worden teruggebracht. Ik noem b.v. de distributieve eigen-

schappen der vermenigvuldiging en de eigenschappen der machten. Zijn deze eenmaal onder de knie, dan kan men den leerlingen ook wel enige eigenschappen van de quotiënten laten bewijzen. Het is dan gewenst de te bewijzen formules stelselmatig terug te brengen tot andere, waarin in plaats van quotiënten producten optreden, om dan met de eigenschappen der producten de verkregen formules te laten bewijzen. Een zelfde bewijstrant volgen we later bij de eigenschappen der worteltrekking in klasse II en bij die der logarithmeneming in klasse III. De leerlingen krijgen dan oog voor de uniforme bouw dezer bewijzen en ze kunnen leren inzien, waarom deze eigenschappen bij uitbreiding van het getalbegrip stellig geen nieuw bewijs vereisen.

Uit wat ik gezegd heb, zal U wel reeds duidelijk geworden zijn, dat ik er niet aan denk den leerlingen een strenge getallentheorie voor te zetten; zomin als ik er aan denk alle strengheid over boord te werpen! De leerlingen moeten langzamerhand aan een logisch bewijs worden gewend. De mate van strengheid groeit reeds gedurende de eerste schoolmaanden zichtbaar. Didactisch zou het niet verantwoord zijn met maximale strengheid in te zetten. Ook als den leerlingen af en toe een stuk exacte bewijsvoering wordt onthouden, dient men er voor te zorgen, dat ze de overtuiging dat het geheel tegen logische contrôle bestand is, niet verliezen.

Omstreeks 1 December is dan het natuurlijke getal afgehandeld en daarmee een stuk leerstof, dat men niet dan tot schade van het gehele wiskunde-onderwijs en bagatelle kan behandelen. Ik heb de overtuiging, dat vele deraillementen in hogere klassen te wijten zijn aan een wankele grondslag in de eerste klasse gelegd.

Ik ben gewoon de negatieve getallen stuk voor stuk in te voeren met behulp van geïmproviseerde symbolen, die b.v. de aftrekking $8 - a = \ldots$ mogelijk moeten maken, als voor a resp. 9, 10, 11, 12, . . . genomen wordt. De behoefte aan nieuwe symbolen groeit zo sterk, dat, mede omdat vorm en naam dier nieuwe symbolen onthouden dienen te worden met dezelfde betrouwbaarheid, waarmee die der natuurlijke getallen worden gekend, naar een simpelder notatie wordt uitgezien. We krijgen dan:

$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \ldots$ en later: $-1, -2, -3, -4, \ldots$

De rekenkundige bewerkingen der optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling worden met de nieuwe getallen gedefiniëerd; enkele der eigenschappen, die in de eerste maanden voor natuurlijke getallen aangenomen of bewezen zijn, worden nu voor negatieve en positieve getallen geverifiëerd. Vervolgens wordt er met de nieuwe getallen gerekend. Op het nut der nieuwe getallen voor de toegepaste rekenkunde wordt uitdrukkelijk gewezen.

Zijn de negatieve getallen eenmaal ingevoerd, dan heeft de aftrekking als zelfstandige bewerking in het systeem der gehele getallen eigenlijk haar bestaansrecht verloren! Immers, elke aftrekking $a - b$ wordt in de practijk teruggebracht tot de optelling $a +$ „het tegengestelde van b". Dit is te opmerkelijker, omdat de negatieve getallen juist ingevoerd werden om elke aftrekking van natuurlijke getallen mogelijk te maken.

De behandeling dezer materie valt vlak vóór en nà de Kerstvacantie. Er volgt nu een tijd van stelselmatige techniek, in het werken met gehele getallen en met vormen, waarin de letters willekeurige positieve of negatieve gehele getallen voorstellen.

Voor de volgende uitbreiding van het getalbegrip, de invoering der breuken, vind ik in den regel eerst de gelegenheid in de loop van Maart.

Het is natuurlijk ook mogelijk de invoering der breuken aan die der negatieve getallen te laten voorafgaan. Men heeft dan spoediger een den leerlingen reeds van de L. S. bekend getallenstelsel beschikbaar voor het letterrekenen, terwijl de invoering der breuken met minder omslag plaats kan hebben dan die der negatieve getallen. Bovendien levert de Historie der Wiskunde ons een motief om de breuken te laten voorgaan. Immers, het breukbegrip is van oudere datum dan het begrip negatief getal. Ik accepteer tot op zekere hoogte het volle gewicht dezer motieven; toch zijn deze niet in staat me tot een andere volgorde te bekeren.

1°. Wat het historisch motief betreft, dit laten we dunkt me reeds voldoende zwaar wegen: ook onze leerlingen leren de breuken eerder dan de negatieve getallen, nl. op de L. S. Het historisch motief vind ik echter niet gewichtig genoeg om in de tweede ronde die op de H. B. S. aanvangt, nu ook de breuken te laten voorgaan. Een invoering der breuken vóór die der negatieve getallen zal òf

slechts een zeer voorlopige kunnen zijn, òf ze zal de invoering der negatieve getallen te zeer ophouden. Voor een voorlopige èn een definitieve behandeling lijken me ten aanzien van een eigenlijk reeds bekende getallensoort geen voldoende termen aanwezig. Ze verhoogt het gevaar, dat de definitieve behandeling geheel achterwege blijft.

2°. Het feit, dat spoedige invoering der breuken ons spoedig over een ruim getallenstelsel doet beschikken, hetgeen de technische vaardigheid ten goede zou komen, kan me niet doen besluiten de breuken onmiddellijk in onze getallenvoorraad op te nemen. Ik wees er reeds op, dat m.i. de technische vaardigheid er niet onder te lijden heeft, als een leerling een tijdlang te schrijven heeft $\frac{a}{4}$, in plaats van $\frac{1}{4}a$, en dan moet onderstellen, dat a een 4-voud is.

Er is een belangrijk verschil tussen het breukbegrip, dat de leerlingen van de L. S. meenemen, en dat wat we op de H. B. S. trachten bij te brengen. Op de L. S. ontwikkelen we het breukbegrip op aanschouwelijke wijze aan de hand van lengten, gewichten, geldsommen, dus van concrete dingen, op de H. B. S. nemen we het natuurlijk getal als grondslag voor het breukbegrip. Op de L. S. werken de leerlingen dus eerst met benoemde breuken: $\frac{1}{4}$ appel, $\frac{1}{10}$ meter, $2\frac{1}{2}$ gulden . . ., en daarna met onbenoemde breuken, op de H. B. S. passen we het formeel ontwikkelde breukbegrip achteraf ook op concrete dingen toe. Op de L. S. leren de leerlingen een breuk beschouwen als een verbinding van twee getallen, in het schrift door een streep gescheiden, waarbij het getal onder de streep aangeeft, dat een zekere grootheid, geheel genaamd, verdeeld wordt in een aantal gelijke delen, welk aantal wordt aangewezen door het getal onder de streep, en dat men vervolgens zoveel delen moet nemen, als door het getal boven de streep wordt aangewezen. In onze H. B. S. boekjes vinden we deze definitie b.v. terug in de vorm: „Een breuk is één of meer evenmatige delen van één of meer gehelen." Het zal duidelijk zijn, dat ik een definitie als deze, waarin een beroep op meetbare grootheden wordt gedaan, vermijd. Van de L. S. behouden we over de opvatting: een breuk is een getallenpaar beschouwd als een getal van een nieuwe soort. We hebben nu duidelijk te maken, wat we er mee bedoelen, als we zeggen, dat we zo'n getallenpaar als één

getal wensen te beschouwen. In de eerste plaats moeten we een criterium geven om uit te maken, welke van twee gegeven breuken de grootste is, dan wel of ze even groot zijn. Vervolgens moeten we, volgens methodes, die we optelling, aftrekking, enz. noemen, uit twee gegeven breuken een derde breuk afleiden. De namen voor deze bewerkingen zijn pas gerechtvaardigd, zodra wordt ingezien, dat deze methodes toegepast op de met de natuurlijke getallen a en b gelijkgestelde breuken $\frac{a}{1}$ en $\frac{b}{1}$ tot uitkomsten leiden, die in overeenstemming zijn met het vroeger geleerde.

De orde-relatie, noch de definities der bewerkingen, leveren voor de leerlingen bezwaren van betekenis op. In verband met de aansluiting bij het oude breukbegrip prefereer ik als definitie voor de gelijkheid van twee breuken die, welke steunt op de gelijkheid van $\frac{a}{b}$ en $\frac{n \, . \, a}{n \, . \, b}$, boven die, welke $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ gelijk noemt, als $a \, . \, d = b \, . \, c$, omdat de eerste, als men zich op meetbare grootheden zou willen beroepen, aanschouwelijk duidelijk te maken is.

Het verifiëren van de rekenkundige eigenschappen voor gebroken getallen kost iets meer inspanning. De moeilijkheden worden echter kleiner, als men alle op te tellen of af te trekken breuken onmiddellijk als gelijknamige breuken geeft.

Het lijkt me gewenst, dat de leerlingen leren inzien, dat in het systeem der rationale getallen elke optelling, elke aftrekking, elke vermenigvuldiging en elke deling, waarvan de deler niet nul is, weer een rationaal getal tot uitkomst geeft.

Tenslotte lijkt het me gewenst, dat de leerlingen de gehele en gebroken getallen op de getallenrechte leren afbeelden, en daarbij leren inzien, dat de beeldpunten op elk lijnstukje, hoe klein ook, doordringen.

Hiermee ben ik door de leerstof van de eerste klasse heen. Voor ik de getalbegrippen ga bespreken, die hierna aan de orde komen, wil ik gaarne opmerken, dat ik het een omissie acht in het nieuwe leerplan, dat er bij de leerstof der tweede klasse niets vermeld staat over bewerkingen met gebroken vormen, hetgeen in het oude leerplan wel het geval was. M.i. is het niet mogelijk theorie en techniek van het rationale getal reeds in klasse I tot een goed einde te brengen, en vermoedelijk is dit ook wel niet de bedoeling van

den Wetgever geweest. We zullen in de toekomst, even goed als dat in het verleden het geval was, genoodzaakt blijven in het eerste kwartaal van de tweede klasse met gebroken vormen door te werken. Dat lezing van het nieuwe leerplan ons in de waan zou kunnen brengen, dat het rationale getal in de eerste klasse afgehandeld moet worden, is te betreuren.

In klasse II moet een voorlopige invoering plaats hebben van het irrationale getal. Ik reken deze taak tot de zwaarste, die op de schouders van ons, wiskundeleraren, rusten. Een taak, die we nooit geheel van ons af kunnen schuiven, omdat we nu eenmaal in klasse II met vierkantswortels en dus met irrationale getallen hebben te werken. Voor een theorie van het irrationale getal zijn de leerlingen echter nog niet rijp. Dit verplicht ons tot verregaande concessies aan strengheid en volledigheid van behandeling.

Men zou als volgt kunnen trachten de moeilijkheden te ontwijken. Na $\sqrt{a}$ gedefiniëerd te hebben, ingeval a het kwadraat is van een rationaal getal, beschouwen we het als vanzelfsprekend, dat er ook een getal $\sqrt{2}$ moet bestaan, waarin we des te beter slagen, naarmate we ons minder inspannen om de diverse getallensoorten te leren onderscheiden. We passen de algorithme voor de vierkantsworteltrekking uit grote kwadraatgetallen nu toe om van $\sqrt{2}$ een willekeurig aantal decimalen te bepalen. Achteraf kan men dan op de ev. uit te lokken vraag, of deze bewerking ooit zal eindigen, ingaan en laten zien, dat $\sqrt{2}$ überhaupt geen rationaal getal kan zijn. We beschouwen nu de oneindig voortlopende, niet repeterende breuk, die men vindt, als een getal van een nieuwe soort, waarvan de eindige decimale breuken rationale benaderingen zijn. De aldus opgezette theorie kan achteraf niet naar behoren gecorrigeerd worden, zonder voorafgaande behandeling der niet op ons program voorkomende repeterende breuken. Van de wijze, waarop de aldus verkregen getallen tussen de rationale verspreid liggen, krijgen de leerlingen wel enig idee, over de definities der bewerkingen en over de eigenschappen ervan zwijgen we zoveel mogelijk, om zo goed als alle beschikbare uren te besteden aan de techniek der wortelvormen.

Ook al is de hier geschetste methode niet onder alle omstandigheden verwerpelijk, ik geloof toch dat we, ook in de tweede klasse, iets meer met onze leerlingen kunnen bereiken. Ik zal U daarom

een schets geven van wat ik me ieder jaar voorstel te doen. Hoever ik in feite kom, hangt o.m. van het klassepeil en van de belangstelling af. Gaat deze verloren, dan doet men verstandig niet verder op theoretische kwesties in te gaan, maar deze uit te stellen tot een hogere klasse op gevaar af, dat dit een uitstel wordt voor goed.

Als ik bij de behandeling der vierkantsworteltrekking een voldoende aantal malen gestuit ben op mislukkende worteltrekkingen, zoals $\sqrt{7}$, voer ik de begrippen onder- en bovenwortel van een getal in. Met de onderwortel bedoel ik het grootste gehele getal, waarvan het kwadraat het bedoelde getal niet overtreft. De suites onder- en bovenwortels duid ik aan met (a_n) en (A_n). De leerling leert een a_n en een A_n bepalen, die een voorgeschreven klein positief bedrag verschillen.

We beelden deze reeksen der onder- en bovenwortels nu af op de getallenrechte. De leerlingen krijgen de indruk, dat er rechts van de beeldpunten der onderwortels en links van die der bovenwortels nog een punt vrij is. Dat er tussen beide rijen niet meer dan één punt kan liggen is gemakkelijk duidelijk te maken. Dat er in dit geval en bij alle analoge constructies inderdaad één punt tussen de beide rijen ligt, nemen we aan. We kunnen nagaan, dat dit punt géén beeldpunt kan zijn van enig rationaal getal x. We reserveren nu dit punt als beeldpunt van een getal ener nieuw te scheppen soort, waarvan $\sqrt{2}$ het eerste exemplaar wordt: *de irrationale getallen.*

We zeggen nu, dat de twee getallenrijen (a_n) en (A_n), een getal ener nieuwe soort definiëren, dat we schrijven als $\alpha = \{a_n, A_n\}$, mits deze getallenrijen aan enige speciale voorwaarden voldoen, die we aan de hand van ons eerste voorbeeld $\sqrt{2}$ gemakkelijk kunnen illustreren.

Deze voorwaarden zijn:

de monotone stijging der a_n;

de monotone daling der A_n;

elke a_n is kleiner dan elk der A_n's;

$A_n - a_n$ kan kleiner gemaakt worden dan elk gewenst klein positief bedrag, door n voldoende groot te kiezen.

Vervolgens laten we zien, dat ook elk rationaal getal door twee zulke getallenrijen kan worden gedefiniëerd, waardoor de ons

bekende rationale getallen vallen onder de getallen van de nieuwe soort. Deze nieuwe soort is die der *reële getallen.* Hoe worden dus uiteindelijk de irrationale getallen gedefiniëerd? Als reële getallen, die niet rationaal zijn.

Bestaat er een rationaal getal r waarvan het beeldpunt inligt tussen alle a_n's en alle A_n's, dan stellen we het reële getal $\{a_n, A_n\}$ gelijk aan het rationale getal r. Is er niet zo'n rationaal getal, dan noemen we het reële getal irrationaal, en groter dan elk der a_n en kleiner dan elk der A_n.

Een irrationaal getal wordt dus gedefiniëerd als een reëel getal, dat niet rationaal is.

Deze definitie nadert, oppervlakkig beschouwd, de uit onze leerboeken welbekende: alle getallen, die noch geheel noch gebroken zijn, noemt men „irrationale getallen". Deze definitie is echter nietszeggend, zolang er geen ruimer getallenbegrip dan het rationale bekend is. We dienen een dgl. definitie dus uit onze boeken te weren. Laten we echter de definitie van reëel getal voorafgaan, dan is de zinledigheid der gewraakte tirade verdwenen.

Ik wijs erop, dat we in klasse I een breuk definiëerden als een getallenpaar dat aan nader te noemen voorwaarden moest voldoen, en dat we in klasse II een reëel getal definiëren als een paar getallenrijen, die aan zekere nader te noemen voorwaarden moeten voldoen.

Eerst nu heeft men het recht de onder- en bovenwortels van 2 als rationale benaderingen van $\sqrt{2}$ te beschouwen.

Van onze verdere taak:

de orde-relatie der reële getallen;

de definities der bewerkingen, en

de eigenschappen der bewerkingen

verschuiven we bijna alles naar klasse IV.

De definitie van som der reële getallen

$$\alpha = \{a_n, A_n\} \text{ en } \beta = \{b_n, B_n\}$$

luidt;

$$\alpha + \beta = \{a_n + b_n, A_n + B_n\}$$

en deze is voor de leerlingen wel begrijpelijk te maken, vooral omdat bij het benaderend rekenen deze definitie gebruikt kan worden, maar toch dreigt spoedig het gevaar voor te grote abstractie, zodat men goed doet veel naar later te verwijzen.

PROSPECTUS

NOORDHOFF'S TAFEL

IN

VIER DECIMALEN

11e—15e DUIZENDTAL

88 blz. in slap linnen geb. *f* 1.—

P. NOORDHOFF N.V. — 1938 — GRONINGEN-BATAVIA

IN DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR
en bij N.V. Uitgevers-Maatschappij
NOORDHOFF-KOLFF, Laan Holle 7,
Batavia C.

INHOUD

Bij de samenstelling van

NOORDHOFF'S TAFEL IN VIER DECIMALEN

hebben we als eerste eis gesteld, dat deze gemakkelijk in het gebruik zou zijn, dus met zo weinig mogelijk interpolaties en indien ze nodig zijn, met zo kleine getallen, dat men daarvoor niets heeft op te schrijven; verder hebben we gemeend de tafel op de eenvoudige, normale wijze in te richten, zoals de tafels in vijf decimalen; er is alles voor en niets tegen om de gebruikelijke inrichting voor deze kleine tafel te behouden.

Op de volgende punten zouden wij gaarne de aandacht van de leraren willen vestigen.

1). De bekende sterretjes, die voorkomen in een tafel met vijf decimalen, zijn hierin niet nodig; er is immers ruimte genoeg op een regel om daar, waar men verandering heeft in het tweede cijfer van de mantisse, de eerste twee decimalen af te drukken bij alle getallen op dezelfde regel.

2). Een tafel met vier decimalen kan inderdaad in vele gevallen een tafel in vijf decimalen vervangen; maar dan is een eerste eis, dat de vier decimalen ten minste betrouwbaar zijn; daarvoor is opklimming in de logarithmen-sinustafel en in de sinustafel (tafel van de natuurlijke waarden) met 1 minuut beslist nodig. Er behoeft dan niet geïnterpoleerd te worden, zoals bij opklimming met 10′ en 6′; men spaart tijd en moeite en voorkomt tevens de menigvuldige vergissingen, die er het gevolg van zijn. Interpolatie heeft bovendien nog dit tegen, dat de maximale fout verdubbeld wordt. Enige bewerkingen stapelen de fouten toch al gauw op tot een eenheid van de derde decimaal of meer; veel groter wordt de fout, als de getallen, waarmee men begint te rekenen, geïnterpoleerde waarden zijn.

3). Voor $\log \sin \alpha$ en $\log \operatorname{tg} \alpha$ van hoeken tot **3°** zijn extra voorzieningen getroffen; deze waarden (in tafels met meer decimalen tot 2°) eisen steeds bijzondere zorg wegens de grote differenties, die daarin optreden.

4). Ook de natuurlijke waarden van blz. 57—79 geven we met opklimming van 1 minuut; dit is alleszins voldoende. Men zou zich bij de tangenten van hoeken van 45°—85° tot 3 decimalen kunnen beperken, daarboven tot minder dan 3; we hebben dat niet gedaan, teneinde de leerlingen niet voor nieuwe moeilijkheden te plaatsen. Grondige kennis van benaderde waarden en de bewerkingen er mee mogen we niet eisen; dat volgens het nieuwe leerplan er althans iets aan moet worden gedaan, is al een grote vooruitgang.

5). De logarithmen-sinustafel en de sinustafel hebben we gegeven in de gebruikelijke vorm, nl. met de vier functies naast elkaar; deze algemeen gevolgde vorm is verreweg de beste; als men dan bovendien, zoals in deze kleine tafel, 4 volle graden naast elkaar overziet, wordt het bladeren tot een minimum beperkt; met het interpoleren houdt dat nl. het meest op. Het ontbreken van sterretjes, die op volgende begincijfers wijzen, het weglaten van lange reeksen gelijke cijfers, waardoor de eindcijfers beter in het oog springen, draagt mede niet weinig bij tot een gemakkelijk gebruik.

6). De bijtafels van de blz. 82—88 zal men in vele gevallen met vrucht kunnen gebruiken. Al wordt de samengestelde intrestrekening in het leerplan niet meer genoemd, dat neemt niet weg, dat nog wel iets er van bij de meetkundige reeksen zal overblijven.

Daar berekeningen met logarithmen in vier decimalen daarvoor niet nauwkeurig genoeg zijn, bovendien onnodig bewerkelijk, zal het dan aanbeveling verdienen gebruik te maken van de rentetafels van blz. 82—85. Deze zijn in 6 decimalen, hetgeen in de meeste gevallen voldoende is; voor een kapitaal K tot *ƒ* 10000 zijn dan immers $(1 + i)^n$ K en $(1 + i)^{-n}$ K nog nauwkeurig op een cent. Beter is het echter, als men naast deze tafel in 4 decimalen Rentetafel D neemt (zie hiernaast, ook voor tafel G); deze geeft ook de sommen van de getallen van blz. 82 en 83 eveneens van blz. 84 en 85 en de annuïteitentafel. Voor de lessen in financiële rekenkunde, die voor de A-afdeling in het leerplan genoemd worden, heeft men nodig Tafel **G** van Wijdenes en Van de Vliet.

Amsterdam, Aug. 1938 P. WIJDENES.
Jac. Obrechtstraat 88.

P. WIJDENES

1 **RENTETAFEL D.** Deze bevat de Rentetafels I, II, III, IV en V hieronder genoemd met **50** termijnen in 8 decimalen, voor de percenten 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$ en 6.
24 blz. *f* 0.50, ... gecart. *f* 0.75

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET

2 **LOGARITHMEN-, RENTE- EN DISCONTOTAFELS — TAFEL E.**
2de druk — 147 bladzijden — met hulpboekje,
gecartonneerd . . . . *f* 3.25
Hulpboekje afzonderlijk . . . . *f* 0.50

INHOUD

De logarithmen der getallen van 1—10800 in 5 dec.

Rentetafels I $(1+i)^n$; II $(1+i)^{-n}$;
III $(1+i)+(1+i)^2+\ldots$
IV $(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\ldots$
V Annuïteitentafel met achterafbetaling van de rente.

Zie onderaan.
Discontotafels
VI $(1-d)^n$; VII $(1-d)^{-n}$;
VIII $(1-d)+(1-d)^2+\ldots$
IX $(1-d)^{-1}+(1-d)^{-2}+\ldots$
X Annuïteitentafel met vooruitbetaling van de rente.

Bijtafels
XI $\sqrt[12]{(1+i)^k}$.
XII Herleiding van dagen tot decimale gedeelten van een jaar en omgekeerd.

Tafel I en II voor de volgende percenten:
$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, 4, $4\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$, 5, $5\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, 6, $6\frac{1}{4}$, $6\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{4}$, 7, $7\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{2}$, $7\frac{3}{4}$ en 8.
Tafel III—XI voor deze percenten:
$\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, $6\frac{1}{2}$, 7, $7\frac{1}{2}$ en 8.
Tafel I—X met 100 termijnen in 8 decimalen.

☛ Op verzoek is een beknopte uitgave van Tafel E gemaakt onder de titel

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET

3 **LOGARITHMEN- EN RENTETAFEL G.**
In deze tafel ontbreken de discontotafels.
95 blz., groot formaat, in slap linnen . . . . *f* 1.60
Pres.-ex. van Tafel G aanvragen bij den uitgever.

Mantisse of decimaal gedeelte van de logarithme.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



Deze bladzijde slechts te gebruiken voor het opzoeken van logarithmen van getallen van hoogstens drie cijfers.

M	log sin	log tg	log cotg	log cos	
0	9,4900	9,5118	10,4882	9,9782	60
1	04	22	78	82	59
2	08	26	74	81	58
3	11	31	69	81	57
4	15	35	65	80	56
5	19	39	61	80	55
6	23	43	57	80	54
7	27	48	52	79	53
8	31	52	48	79	52
9	35	56	44	78	51
10	9,4939	9,5161	10,4839	9,9778	50
11	42	65	35	78	49
12	46	69	31	77	48
13	50	73	27	77	47
14	54	78	22	76	46
15	58	82	18	76	45
16	62	86	14	75	44
17	65	90	10	75	43
18	69	95	05	75	42
19	73	9,5199	10,4801	74	41
20	9,4977	9,5203	10,4797	9,9774	40
21	81	07	93	73	39
22	84	12	88	73	38
23	88	16	84	73	37
24	92	20	80	72	36
25	9,4996	24	76	72	35
26	9,5000	28	72	71	34
27	03	33	67	71	33
28	07	37	63	70	32
29	11	41	59	70	31
30	9,5015	9,5245	10,4755	9,9770	30
31	19	49	51	69	29
32	22	54	46	69	28
33	26	58	42	68	27
34	30	62	38	68	26
35	34	66	34	67	25
36	37	70	30	67	24
37	41	75	25	67	23
38	45	79	21	66	22
39	49	83	17	66	21
40	9,5052	9,5287	10,4713	9,9765	20
41	56	91	09	65	19
42	60	9,5295	05	64	18
43	64	9,5300	10,4700	64	17
44	67	04	10,4696	64	16
45	71	08	92	63	15
46	75	12	88	63	14
47	78	16	84	62	13
48	82	20	80	62	12
49	86	24	76	61	11
50	9,5090	9,5329	10,4671	9,9761	10
51	93	33	67	61	9
52	9,5097	37	63	60	8
53	9,5101	41	59	60	7
54	04	45	55	59	6
55	08	49	51	59	5
56	12	53	47	58	4
57	15	57	43	58	3
58	19	62	38	58	2
59	23	66	34	57	1
60	9,5126	9,5370	10,4630	9,9757	0
	log cos	log cotg	log tg	log sin	M

71°

M	log sin	log tg	log cotg	log cos	
0	9,5126	9,5370	10,4630	9,9757	60
1	30	74	26	56	59
2	34	78	22	56	58
3	37	82	18	55	57
4	41	86	14	55	56
5	45	90	10	55	55
6	48	94	06	54	54
7	52	9,5398	10,4602	54	53
8	56	9,5402	10,4598	53	52
9	59	07	93	53	51
10	9,5163	9,5411	10,4589	9,9752	50
11	67	15	85	52	49
12	70	19	81	51	48
13	74	23	77	51	47
14	77	27	73	51	46
15	81	31	69	50	45
16	85	35	65	50	44
17	88	39	61	49	43
18	92	43	57	49	42
19	96	47	53	48	41
20	9,5199	9,5451	10,4549	9,9748	40
21	9,5203	55	45	47	39
22	06	59	41	47	38
23	10	63	37	47	37
24	13	67	33	46	36
25	17	71	29	46	35
26	21	75	25	45	34
27	24	79	21	45	33
28	28	83	17	44	32
29	31	87	13	44	31
30	9,5235	9,5491	10,4509	9,9743	30
31	39	9,5496	04	43	29
32	42	9,5500	10,4500	43	28
33	46	04	10,4496	42	27
34	49	08	92	42	26
35	53	12	88	41	25
36	56	16	84	41	24
37	60	20	80	40	23
38	63	24	76	40	22
39	67	28	72	39	21
40	9,5270	9,5531	10,4469	9,9739	20
41	74	35	65	39	19
42	78	39	61	38	18
43	81	43	57	38	17
44	85	47	53	37	16
45	88	51	49	37	15
46	92	55	45	36	14
47	95	59	41	36	13
48	9,5299	63	37	35	12
49	9,5302	67	33	35	11
50	9,5306	9,5571	10,4429	9,9734	10
51	09	75	25	34	9
52	13	79	21	34	8
53	16	83	17	33	7
54	20	87	13	33	6
55	23	91	09	32	5
56	27	95	05	32	4
57	30	9,5599	10,4401	31	3
58	34	9,5603	10,4397	31	2
59	37	07	93	30	1
60	9,5341	9,5611	10,4389	9,9730	0
	log cos	log cotg	log tg	log sin	M

70°

1°

M	Sin	Tg	Cotg	Cos	
0	0,0175	0,0175	57,2900	0,9998	60
1	77	77	56,3506	98	59
2	80	80	55,4415	98	58
3	83	83	54,5613	98	57
4	86	86	53,7086	98	56
5	89	89	52,8821	98	55
6	92	92	52,0807	98	54
7	95	95	51,3032	98	53
8	0,0198	0,0198	50,5485	98	52
9	0,0201	0,0201	49,8157	98	51
10	0,0204	0,0204	49,1039	0,9998	50
11	07	07	48,4121	98	49
12	09	09	47,7395	98	48
13	12	12	47,0853	98	47
14	15	15	46,4489	98	46
15	18	18	45,8294	98	45
16	21	21	45,2261	98	44
17	24	24	44,6386	97	43
18	27	27	44,0661	97	42
19	30	30	43,5081	97	41
20	0,0233	0,0233	42,9641	0,9997	40
21	36	36	42,4335	97	39
22	39	39	41,9158	97	38
23	41	41	41,4106	97	37
24	44	44	40,9174	97	36
25	47	47	40,4358	97	35
26	50	50	39,9655	97	34
27	53	53	39,5059	97	33
28	56	56	39,0568	97	32
29	59	59	38,6177	97	31
30	0,0262	0,0262	38,1885	0,9997	30
31	65	65	37,7686	96	29
32	68	68	37,3579	96	28
33	70	71	36,9560	96	27
34	73	74	36,5627	96	26
35	76	76	36,1776	96	25
36	79	79	35,8006	96	24
37	82	82	35,4313	96	23
38	85	85	35,0695	96	22
39	88	88	34,7151	96	21
40	0,0291	0,0291	34,3678	0,9996	20
41	94	94	34,0273	96	19
42	0,0297	0,0297	33,6935	96	18
43	0,0300	0,0300	33,3662	96	17
44	02	03	33,0452	95	16
45	05	06	32,7303	95	15
46	08	08	32,4213	95	14
47	11	11	32,1181	95	13
48	14	14	31,8205	95	12
49	17	17	31,5284	95	11
50	0,0320	0,0320	31,2416	0,9995	10
51	23	23	30,9599	95	9
52	26	26	30,6833	95	8
53	29	29	30,4116	95	7
54	32	32	30,1446	95	6
55	34	35	29,8823	94	5
56	37	38	29,6245	94	4
57	40	40	29,3711	94	3
58	43	43	29,1220	94	2
59	46	46	28,8771	94	1
60	0,0349	0,0349	28,6363	0,9994	0
	Cos	Cotg	Tg	Sin	M

88°

2°

M	Sin	Tg	Cotg	Cos	
0	0,0349	0,0349	28,6363	0,9994	60
1	52	52	28,3994	94	59
2	55	55	28,1664	94	58
3	58	58	27,9372	94	57
4	61	61	27,7117	93	56
5	64	64	27,4899	93	55
6	66	67	27,2715	93	54
7	69	70	27,0566	93	53
8	72	73	26,8450	93	52
9	75	75	26,6367	93	51
10	0,0378	0,0378	26,4316	0,9993	50
11	81	81	26,2296	93	49
12	84	84	26,0307	93	48
13	87	87	25,8348	93	47
14	90	90	25,6418	92	46
15	93	93	25,4517	92	45
16	96	96	25,2644	92	44
17	0,0398	0,0399	25,0798	92	43
18	0,0401	0,0402	24,8978	92	42
19	04	05	24,7185	92	41
20	0,0407	0,0407	24,5418	0,9992	40
21	10	10	24,3675	92	39
22	13	13	24,1957	91	38
23	16	16	24,0263	91	37
24	19	19	23,8593	91	36
25	22	22	23,6945	91	35
26	25	25	23,5321	91	34
27	27	28	23,3718	91	33
28	30	31	23,2137	91	32
29	33	34	23,0577	91	31
30	0,0436	0,0437	22,9038	0,9990	30
31	39	40	22,7519	90	29
32	42	42	22,6020	90	28
33	45	45	22,4541	90	27
34	48	48	22,3081	90	26
35	51	51	22,1640	90	25
36	54	54	22,0217	90	24
37	57	57	21,8813	90	23
38	59	60	21,7426	89	22
39	62	63	21,6056	89	21
40	0,0465	0,0466	21,4704	0,9989	20
41	68	69	21,3369	89	19
42	71	72	21,2049	89	18
43	74	75	21,0747	89	17
44	77	77	20,9460	89	16
45	80	80	20,8188	88	15
46	83	83	20,6932	88	14
47	86	86	20,5691	88	13
48	88	89	20,4465	88	12
49	91	92	20,3253	88	11
50	0,0494	0,0495	20,2056	0,9988	10
51	0,0497	0,0498	20,0872	88	9
52	0,0500	0,0501	19,9702	87	8
53	03	04	19,8546	87	7
54	06	07	19,7403	87	6
55	09	09	19,6273	87	5
56	12	12	19,5156	87	4
57	15	15	19,4051	87	3
58	18	18	19,2959	87	2
59	20	21	19,1879	86	1
60	0,0523	0,0524	19,0811	0,9986	0
	Cos	Cotg	Tg	Sin	M

87°

☞ Evenredige interpolatie geeft voor de **cotg** tot 2° waarden, nauwkeurig in 2 decimalen; van 2° tot 5°30′ in 3 decimalen.

Ik noemde de voorlopige invoering van het irrationale getal in klasse II een zware taak, zwaarder dan de definitieve invoering in een hogere klasse. Men stuit nl. telkens op didactische moeilijkheden, die niet afdoende uit de weg te ruimen zijn.

Voor een theorie van het irrationale getal, hoe bescheiden en onvolledig ook, zijn de oneindige processen onontwijkbaar; het limietbegrip dat telkens op komt duiken, komt echter pas later in de derde klasse vluchtig aan de orde, en het zal dan en in de vierde klasse nog veel zorg baren. Ook de theorie der benaderde waarden hebben de leerlingen nog niet gehad, als we het irrationale getal invoeren, en toch willen we de leerlingen reeds rationale benaderingen van de aan de orde zijnde irrationale getallen doen beschouwen. Juist deze benaderingen zijn in de toegepaste rekenkunde van zo hoog belang. Voorts wijs ik er op, dat reeds in de eerste meetkundelessen van klasse II het begrip irrationale verhouding aan de orde kan komen. Van een exacte theorie kan dus geen sprake zijn, we zullen vaak met onaffe beschouwingen genoegen moeten nemen; men doet beter alles wat ik als gewenst voorstelde, te schrappen, indien zou blijken dat men de leerlingen er niet actief mee zou kunnen bezig houden. Maar ik weiger toch de leerlingen af te schepen met een nietszeggende definitie als: „een getal dat niet geheel of gebroken is, heet irrationaal", zolang er nog geen reële getallen zijn ingevoerd. Ik houd het voor mogelijk een houdbare definitie van reëel getal te geven door middel van gekoppelde varianten. Ik acht de tijd niet verspild, die ik nodig heb om de leerlingen er van te doordringen, dat in het systeem der rationale getallen niet elk lijnstuk een lengte heeft, dat m.a.w. de getallenrechte met de beeldpunten der rationale getallen nog niet vol is. Een leerling der tweede klasse kan en mag m.i. best begrijpen, dat de bewering: „bij elk getallenpaar (x, y) behoort in een rechthoekig coördinatenstelsel één punt van het platte vlak", steeds waar is, terwijl de omkering: „bij elk punt van het platte vlak behoort één getallenpaar" niet juist is, zolang we alleen maar rationale getallen kennen.

Bij de herhaling en de uitbreiding van het getalbegrip, die in klasse IV en V aan de orde komen, kunnen we dieper ingaan op de definities der bewerkingen en op de eigenschappen der bewerkingen dan in de lagere klassen het geval was. Misschien kunnen we de klasse

duidelijk maken, wat de bewering $(\sqrt{2})^2 = 2$ eigenlijk inhoudt. Beperking blijft ook hier geboden! Vaak is men genoodzaakt alles weer van den grond af op te halen. Op één van de eerste stereometrie-lessen van mijn tegenwoordige vijfde klasse in het begin van de lopende cursus had ik de stelling: de inhoud van een rechthoekig blok $= l \times b \times h$, te bespreken voor het geval, dat b.v. $l = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{3}$, $h = \sqrt{2}$. Dat een geheel ophalen van de theorie van het irrationale getal noodzakelijk was, moge blijken uit het simpele feit, dat de 21 leerlingen mijner vijfde klasse afkomstig bleken uit 8 verschillende tweede klassen van Nederlandse H.B.S.en, waarmee ik natuurlijk niet wil zeggen, dat deze herhaling overbodig geweest zou zijn, als alle 21 leerlingen uit mijn eigen tweede klas afkomstig waren geweest. Ik zou het betreuren, indien we als leraar gedwongen waren elk jaar met elke klasse de theorie in voorgeschreven omvang te behandelen, ik zou het betreuren als elke leerling over deze materie aan het einde van de cursus een voorgeschreven hoeveelheid examineerbare kennis zou moeten bezitten. Zo ergens, dan waardeer ik de vrijheid, die we als leraar hebben, hier!

Tot de uitbreiding van het getalbegrip behoort nog, zoals ik reeds aanstipte, de uitbreiding van het machtsbegrip in klasse III. Bij het begin van de derde klasse betekent in a^b de exponent b nog uitsluitend een natuurlijk getal, terwijl men voor a reeds naar believen een natuurlijk getal, een rationaal getal of een reëel getal mag nemen. Er worden nu enige nieuwe afspraken gemaakt: als exponenten worden achtereenvolgens negatieve, gebroken en willekeurige rationale getallen toegelaten. Alleen is het aan te raden, om, zodra er gebroken exponenten worden ingevoerd, zich bij de keuze van grondtal tot positieve, reële getallen te beperken, in verband met het ongedefiniëerd zijn van $a^{n/m}$ voor negatieve waarden van a in al die gevallen, waarin de noemer m uit de exponent een even getal voorstelt.

Essentiële moeilijkheden ontstaan er eerst, zodra er irrationale exponenten worden beschouwd, hetgeen bij de behandeling der logarithmen bijna voortdurend het geval is. Het lijkt me niet gewenst in klasse III werkelijk te bewijzen, dat door

$$2^{\sqrt{5}}$$

b.v. inderdaad een reëel getal wordt bepaald; voldoende lijkt het me toe, dit den leerlingen aannemelijk te maken.

Voorts zou ik me gaarne bij het definiëren van

$$\log^a b$$

beperken tot positieve waarden van *a* en *b*, ook al wordt deze uitdrukking nog niet voor elk stel niet-positieve waarden zinloos. Men zie verder de tabel op blz. 170.

Ook wil ik er gaarne op wijzen, dat er in het begin van klasse IV nog een ongezochte gelegenheid is om iets over het getalbegrip naar voren te brengen, nl. bij de behandeling der vectoren op de mechanica-les. Nodig is het o.a. de gelijkheid van twee vectoren te definiëren, wat in sommige onzer leerboeken nog steeds wordt verzuimd, alsmede de optelling en aftrekking van vectoren en de eigenschappen dezer bewerkingen, terwijl van de vermenigvuldiging slechts de vermenigvuldiging met een skalar en niet die met een vector aan de orde komt.

Thans heb ik U nog toe te lichten, hoe ik me de behandeling der complexe getallen denk. Vóór 1937, toen het complexe getal evenmin als nu in het program vermeld stond, was het usance de complexe getallen reeds in klasse II in te voeren om de vierkantsworteltrekking uit negatieve getallen te laten gelukken, of anders in klasse III, om er voor te zorgen, dat elke vierkantsvergelijking twee wortels kreeg.

Gevolg van deze methode was, dat de leerlingen vrij spoedig na elkaar twee verre van eenvoudige uitbreidingen van het getalbegrip te slikken kregen, die beide in het stadium der mathematische ontwikkeling, waarin onze leerlingen zich dan bevinden, slechts een provisorisch karakter konden dragen. Ik geloof niet onbillijk te zijn, als ik beweer, dat er op voorlopige invoering zelden een definitieve volgde! Terwijl echter de invoering der irrationale getallen niet te ontgaan was, — we kunnen de wortels in onze schoolwiskunde eenvoudig niet missen! — was de invoering der complexe getallen een overbodige luxe, in geen enkel opzicht door die immanente noodzakelijkheid gekenmerkt, die de invoering der irrationale getallen bezit.

Onze schoolwiskunde wordt soberder, maar exacter, harmonischer van bouw, toont meer eenheid en wordt daardoor voor de leerlingen onzer derde klassen begrijpelijker, als we niet in de lagere klassen tot een overijlde invoering der complexe getallen

overgaan. Mijn voornaamste bezwaar tegen het optreden van de *i* in de lagere klassen is wel deze, dat onze leerlingen spoedig na de eerste kennismaking die *i* toch weer links laten liggen, nl. bij de behandeling der kwadratische functie met de grafische voorstelling ervan, en bij de leer der logarithmen. Ook in de gehele gonio- en trigonometrie. Slechts bij de oplossing der vierkantsvergelijkingen beweegt men zich, zij het ook niet consequent, in het complexe gebied. Het gevolg is, dat de leerlingen telkens van het ene gebied in het andere moeten overspringen, wat zeer verwarrend werkt. Laat men de complexe getallen voorlopig weg, dan moet men de stelling, dat elke vierkantsvergelijking twee wortels heeft, aanvankelijk prijsgeven. Hierin zie ik echter van didactisch standpunt voor klasse III volstrekt geen verlies. Juist de eigenschap, dat de vergelijking: $ax^2 + bx + c \doteq 0$ twee, één of geen wortels heeft, naargelang de discriminant $b^2 - 4ac > 0$, $= 0$ of < 0 is, wordt door het feit, dat de grafiek van de kwadratische functie $y=ax^2+bx+c$ twee, één of nul punten met de x-as gemeen heeft, naargelang die discriminant > 0, $= 0$ of < 0 is, voor de leerlingen, die geen complexe getallen kennen, duidelijk geïllustreerd. Consequentie van de behandeling der complexe getallen is, als men eenheid van behandeling nastreeft, dat men ook spreekt van 2 reële en verschillende, 2 samenvallende reële en van 2 complexe snijpunten van bedoelde grafiek met de x-as? Wie onzer durft dit aan, in de derde klasse? Weglating der complexe getallen in klasse II en III heeft voor de eenheid van behandeling van vierkantsvergelijkingen en grafische voorstellingen onmiskenbare didactische voordelen. In de vele jaren, waarin ik vóór 1937 de complexe getallen in de lagere klassen wel behandelde, was de praktijk deze, dat ik maar enkele woorden wijdde aan de invoering van het symbool *i*, om daarna zo spoedig mogelijk tot de orde van den dag, dat was tot de techniek over te gaan.

De bedoelde toelichting zou ik als volgt willen samenvatten:

a. Ik constateerde, dat er geen enkel reël getal was, dat voldeed aan de opgave: $\sqrt{-3} \doteq x$.

b. Ik voegde aan de aanwezige getallenvoorraad een nieuwsoortig getal *i* toe, waarvoor bij definitie de eigenschap

$$i^2 = -1$$

gold.

c. Ik sprak af, dat voor alle vormen, waarin deze *i* als term of factor mocht optreden, de vroeger gegeven definities en eigenschappen der bewerkingen, althans der eerste vier, formeel zouden blijven doorgaan.

d. Ik deelde mede, dat men tweetermen van de vorm $a + bi$, waarin de *i* de zojuist genoemde rol speelt, complexe getallen noemt.

Indien ik bij de behandeling der complexe getallen in de vijfde klasse niet zou kunnen uitstijgen boven het zo juist aangegeven peil, zou ik met weinig spijt die gehele behandeling willen prijsgeven. M.i. kan men echter in de vijfde klasse het volgende behandelen:

a. Invoering der complexe getallen als getallenparen, waarmee rekenoperaties zullen worden uitgevoerd volgens nader aan te geven voorschriften.

b. Definiëring van de gelijkheid van twee complexe getallen, waarbij we er op wijzen, dat de begrippen „groter dan" en „kleiner dan" hier ontbreken.

c. Definiëring der eerste vier rekenkundige beweringen.

d. Het bewijzen der grondeigenschappen dezer bewerkingen.

e. Voorstelling der complexe getallen met modulus en argument.

f. Meetkundige voorstelling der complexe getallen volgens G a u s s.

g. Oplossing der vierkantsvergelijking.

h. Stelling van d e M o i v r e met enige toepassingen, bv. de oplossing van enkele vergelijkingen als:

$$x^3 - 1 \doteq 0 \text{ en } x^8 - 1 \doteq 0.$$

i. Het aantonen, dat de vierkantswortel uit een complex getal wederom een complex getal is.

Dit alles, indien en voorzover de tijd het toelaat!

Indien men nl. in de vijfde klasse ook iets aan Integraalrekening wil doen, en de leerlingen ook behoorlijk voor het eindexamen wil voorbereiden, wat veel tijd kost, maar waarvan ik de betekenis niet wens te kleineren, heeft men zijn handen vol, zó vol, dat enige uren die men zou kunnen bezuinigen, welkom zijn!

Men heeft de theorie van het complexe getal wel een „sluitsteen" genoemd. Als zodanig kan ik ze echter slechts matig waarderen. De tabel, waarover U beschikt, geeft duidelijk aan, welke leemten

de theorie, die we erover aan onze leerlingen zouden kunnen voorzetten, zal moeten blijven vertonen. De ontwikkeling van het getalbegrip moet op de H.B.S. noodzakelijkerwijze een onaf proces blijven. Immers:

a. We kunnen ook in klasse V niet alle rekenkundige bewerkingen definiëren; 2^i bv. blijft ongedefiniëerd.

b. We kunnen bijgevolg niet duidelijk maken, dat elke bewerking met twee complexe getallen weer tot een complex getal voert.

c. We kunnen niet nagaan, in hoeverre, of onder welke speciale voorwaarden, enkele eigenschappen, die voor reële getallen golden, voor complexe blijven doorgaan.

Het niet behandelen van A^b lijkt wellicht willekeurig.

Zouden we echter $A^{\frac{n}{m}}$ willen definiëren, dan zou het noodzakelijk worden, met hoofdwaarden van wortels uit complexe getallen te gaan werken, wat m.i. buiten ons program valt.

Dat een eigenschap als

$$\sqrt{A} \, . \, \sqrt{B} = \sqrt{AB}$$

niet algemeen geldt, evenmin als dit trouwens in het systeem der reële getallen het geval is, zullen de leerlingen inzien door naast elkaar te zetten:

$$i^2 = -1 \text{ en } \sqrt{-1} \, . \, \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{+1} = +1.$$

Maar het nagaan onder welke speciale voorwaarde genoemde eigenschap nu wel geldt, valt reeds buiten ons bestek! Mijn tabel bevat, dunkt me, reeds een maximum-program!

Hiermee ben ik, M. d. V., aan het eind van mijn inleiding gekomen. Ik wil gaarne besluiten met de mededeling, dat ik de Commissie Beth-Dijksterhuis ten zeerste dankbaar ben voor haar pioniersarbeid en Uw Vereniging voor haar aandeel in de opbouwende kritiek: ik heb de overtuiging, dat er een program is ontstaan, dat, wat het getalbegrip betreft, een behoorlijk evenwicht tussen technische beheersing der leerstof en theoretisch inzicht belooft te bevorderen!

Aan de gedachtenwisseling ontlenen we het volgende:

De Heer L. Crijns, Maastricht, wijst erop, dat het ongewenst is van een „getal oneindig" te spreken.

De inleider beaamt dit, en wenst daarom het getalbegrip op onze scholen nimmer zodanig uit te breiden, dat men het recht heeft van het getal oneindig te spreken.

De Heer Dr. A. J. Staring, Wageningen, vraagt, of het geen bezwaren oplevert, dat de leerlingen de breuken reeds lang kennen en ze een tijdlang toch niet mogen gebruiken. Dit lijkt hem voor het onderwijs zeer bezwaarlijk.

De inleider antwoordt, dat zowel leraar als leerling zeer op hun hoede moeten zijn, als ze een tijdlang de breuken bannen. Men moet aandacht schenken aan de getallensoort, waarmee men werkt, hetgeen een goed iets is. Het overkomt den inleider wel eens, dat hij ten onrechte een breuk gebruikt, en door een leerling op het ongeoorloofde gebruik van zo'n breuk wordt gewezen. Hij stelt dit zó op prijs, dat hij die fout opzettelijk zou willen maken, indien de vergissing achterwege bleef. Hij is van oordeel, dat het zich vrijwillig onthouden van het gebruik van breuken de waardering voor die breuken straks doet stijgen, als de leerling ze weer tot zijn beschikking krijgt. De inleider meent, dat, wat men hier als bezwaren ziet, een goed inzicht in de functie van het getal juist kan bevorderen.

De heer B. Kleefstra, Velsen, vraagt, met welk doel de inleider eerst de notatie

$$\overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \ldots$$

invoert en eerst daarna de notatie:

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \ldots$$

De inleider antwoordt hierop, dat hij het nog erger maakt dan de vrager vermoedt. Om te doen inzien, dat er in de keuze van de symbolen voor de negatieve getallen een factor van menselijke willekeur zit, en dat de gangbare notatie gekozen wordt, niet omdat ze noodzakelijk zou zijn, maar omdat ze de meest practische is, werkt de inleider eerst met geïmproviseerde symbolen als:

. . ., ↑, ⊡, ♡, △, 0, 1, 2, 3, 4, . . .

Elk jaar wordt deze rij natuurlijk weer anders; de leerlingen zijn

in deze steeds vindingrijk. Omdat de rij ook gememoriseerd moet worden, blijkt het gewenst naar een eenvoudiger notatie om te zien. En zo krijgen we dan, na eerst de rij der natuurlijke getallen voorzien van streepjes of in andere kleur geschreven als negatieve getallen te hebben gebruikt, tenslotte de officiële gangbare notatie.

De Heer P. Bronkhorst, Eindhoven, vraagt, of het den inleider wel eens mogelijk is geweest de algemene commutatieve en associatieve eigenschappen der optelling met de klasse af te leiden uit de enkelvoudige commutatieve en associatieve eigenschappen, en voorts, of hij onder een uitdrukking als

$$+3-2-5+4$$

een optelling wenst te verstaan, waarin de bewerkingstekens weggelaten zijn.

De inleider beantwoordt de laatste vraag bevestigend; hij beschouwt de tekens als toestandstekens en leest:
plus drie en daarbij min twee en daarbij min vijf en daarbij plus vier.

Wat de eerste vraag betreft, de enkelvoudige commutatieve eigenschap der optelling acht spr. voor de leerlingen zonder meer duidelijk, die der producten behandelt hij zelden. Wel is het zeer goed mogelijk, hoewel geenszins noodzakelijk, de algemene commutatieve eigenschappen der optelling en der vermenigvuldiging streng te bewijzen, als de enkelvoudige commutatieve en associatieve aannemelijk gemaakt zijn. [1])

---

[1]) In de schriftelijk voortgezette gedachtenwisseling tussen den Heer Bronkhorst en den inleider, deelt de eerste mede, dat hij gaarne ter vergadering van den inleider zou hebben vernomen, of deze een afleiding van de algemene commutatieve en associatieve eigenschap der opstelling in de volgende trant voor de jeugd niet te moeilijk vindt.

Gegeven: $a+b=b+a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$

$(a+b)+c=a+(b+c) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$

Te bewijzen: $a+b+c+d=c+a+d+b.$

Bewijs:
$$
\begin{aligned}
a+b+c+d &= \{(a+b)+c\}+d && \text{(volgens def.)}\\
&= \{c+(a+b)\}+d && \text{(volgens 1)}\\
&= \{(c+a)+b\}+d && \text{(volgens 2)}\\
&= (c+a)+(b+d) && \text{(volgens 2)}\\
&= (c+a)+(d+b) && \text{(volgens 1)}\\
&= \{(c+a)+d\}+b && \text{(volgens 2)}\\
&= c+a+d+b.
\end{aligned}
$$

De Heer H. J. van Geuns, Middelburg, informeert naar het standpunt van den inleider t.a.v. de eisen, die gesteld dienen te worden aan de nauwkeurigheid, waarmee de eigenschappen der bewerkingen worden geformuleerd. Is de inleider tevreden, als iemand zegt: een breuk wordt door een getal gedeeld door de teller erdoor te delen? Of wenst hij eraan toegevoegd te zien: en de noemer onveranderd te laten? Voorts vraagt hij, of het gebruik van nieuwe tekens niet bezwaarlijk wordt, als er in de klasse nieuwe leerlingen (door doublering of van elders) bijkomen, die bedoelde tekens niet kennen, en met de hen bekende andere notatie voor den dag komen.

Op de eerste vraag antwoordt de inleider bevestigend. Hij stelt echter een nauwkeuriger formulering wel op prijs, al eist hij die van de leerlingen niet, omdat hij nu eenmaal woordelijk memoriseren niet nodig vindt. Het leerboek dient de redactie van die eigenschappen zo nauwkeurig mogelijk te geven, en de leerlingen moeten er oog voor krijgen.

Wat het laatste probleem betreft, de inleider ziet die bezwaren niet: hij waardeert het juist die nieuwe tekens nog eens aan de klasse te kunnen uitleggen, terwille van de nieuwe leerlingen. Het kost weinig tijd en ook de andere leerlingen kunnen zich nog weer eens duidelijk de functie van het nieuwe teken realiseren.

De Heer Dr. E. W. Beth, Haarlem, vraagt, of de inleider onmiddellijk het algemene breukbegrip geeft, of eerst alleen positieve tellers en noemers toelaat en later pas de negatieve.

De inleider antwoordt, dat hij aanvankelijk alleen breuken definiëert met natuurlijke getallen in teller en noemer, maar dat hij,

---

De inleider acht het zeker niet gewenst den leerlingen onzer eerste klassen een dergelijk bewijs te geven. Op het ogenblik toch, dat deze leerstof aan de orde komt, is die bewijstrant voor de leerlingen zonder enige twijfel nog te moeilijk. Hij heeft daarom in zijn leerboek der Reken- en Stelkunde ook géén bewijzen van de eigenschappen der optelling opgenomen. Zodra men aan de producten toe is, kan men iets verder gaan. Nadat men heeft laten zien, dat men in een gedurig product twee naast elkaar staande factoren mag verwisselen, levert het bewijs van de algemene commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging, dat door herhaalde toepassing der zo juist genoemde gegeven kan worden, geen bezwaar van betekenis op. Door hierop in te gaan gleed de inleider ter vergadering langs de eigenlijke bedoeling van den vrager heen.

ook in zijn leerboek, vervolgens de uitbreiding van het breukbegrip bespreekt, zodat aan het eind breuken worden toegelaten met willekeurige rationale getallen in teller en noemer, mits de noemer nooit nul is.

De Heer S. J. Geursen, Tiel, vraagt, hoeveel tijd de inleider aan Algebra en Rekenen samen besteedt. Er zijn nl. scholen, waar men in de eerste klasse drie uren voor Meetkunde reserveert en andere, waar men met twee uren voor dit vak genoegen neemt. Voorts vraagt hij, of de inleider zich niet schuldig maakt aan verkapte invoering van varianten, door zijn wijze van behandeling van het irrationale getal in de tweede klasse, met name door de schrijfwijze $\{a_n, A_n\}$. Dit begrip hoort toch meer thuis in de vierde klasse en is voor de tweede wel wat moeilijk.

De inleider antwoordt, dat hij gedurende het gehele eerste leerjaar vier uren besteedt aan Reken- en Stelkunde, en dat het natuurlijke getal bijna drie maanden deze vier uren in beslag neemt. Wat de varianten betreft, deze worden niet verkapt ingevoerd, maar openlijk en wel van oudsher voor het eerst bij de zgn. evenredige afhankelijkheid van grootheden. Het woord variant vervangt hier de ongelukkige benaming „veranderlijk getal". De inleider geeft aan het woord variant verre de voorkeur, de behandeling der leerstof met deze nieuwe terminologie blijkt geen extra moeilijkheden op te leveren, maar integendeel door een exacter woordgebruik de behandeling te vergemakkelijken.

De Heer G. Lottering, Hoorn, vraagt, hoever de inleider wenst te gaan met de logische opbouw van de eigenschappen der deling.

De inleider antwoordt, dat hij in zijn boek èn in zijn lessen een achttal eigenschappen der quotiënten formuleert en bewijst en dat het hem mogelijk lijkt dit te doen zonder concessie aan de strengheid. Men kan natuurlijk het aantal eigenschappen naar eigen behoefte inkrimpen of uitbreiden.

De Heer H. J. Hartwijk, Den Haag, vraagt, of het den inleider wel eens gelukt is de snede van Dedekind te behandelen, en of hij dan wel eens heeft kunnen laten zien, dat in het geval van

een onmeetbare snede de kleinste klasse geen grootste en de grootste klasse geen kleinste getal bezit. Voorts vraagt hij, hoe groot het aantal uren is, dat de inleider voor de complexe getallen in klasse V wenst uit te trekken.

Vraag 1 en vraag 2 beantwoordt de inleider bevestigend, maar slechts met betrekking tot het onderwijs aan afzonderlijke leerlingen. Klasse-ervaring met de theorie van Dedekind heeft de inleider zo goed als niet. Hij heeft wel ervaring opgedaan met de theorie der gekoppelde varianten, die afkomstig is van Bachmann. Deze theorie vertoont vooral verwantschap met die van Cantor. Ze is minder streng, maar aanschouwelijker en leent zich naar de mening van den inleider het best voor onze scholen. Het is mogelijk in de klasse te laten zien, dat het reële getal (a_n, A_n) soms geen rationaal getal definiëert, b.v. in het geval, dat (a_n) de rij der onderwortels en (A_n) de rij der bovenwortels van 2 voorstelt.

Op de laatste vraag antwoordt de inleider, dat hij voor de behandeling van de door hem aangegeven leerstof over het complexe getal minstens 9 à 10 lessen nodig heeft.

De Heer C. J. Alders, Haarlem, vraagt, of de inleider het gewenscht acht in te gaan op de bespreking van machten met onmeetbare exponenten, bv. $2^{\sqrt{5}}$ en of de inleider ervaring heeft met de fundamentaalrijen van Cantor.

De inleider antwoordt hierop, dat men zeer zeker in de klasse de bedoelde definitie kan geven, bv. in de vorm:

$$2^{\sqrt{5}} = \{2^{a_n}, 2^{A_n}\},$$

waarin (a_n) de rij der onderwortels en (A_n) de rij der bovenwortels van 5 voorstelt. Hij is er zich van bewust, dat hij vele jaren over deze materie is heengegleden, maar dat hem in de klasse toch ook wel eens is gevraagd, wat toch de uitdrukking $10^{\sqrt{2}}$, die in het leerboek stond, eigenlijk betekende. De inleider is van oordeel, dat een leerboek de bedoelde definitie (of een soortgelijke) stellig dient te geven, al betekent dit nu nog niet, dat streng bewezen dient te worden, dat de beide exponentiële varianten de fundamentele eigenschappen bezitten, die nodig zijn, als ze een reël getal zullen definiëren.

Klasse-ervaring met de fundamentaalrijen van Cantor heeft de inleider niet. Hij heeft de wijze van behandeling voor ogen, die één onzer schoolboeken over deze theorie geeft, maar die behandeling gaat naar zijn mening veel te ver. De fundamentaalrijen van Cantor zitten natuurlijk ook in sprekers definitie, maar deze leent zich zo goed om onvolledig te zijn, en toch nog iets toonbaars over te houden. Geen enkele theorie van het irrationale getal is naar sprekers mening voor de school geschikt zonder verregaande concessies aan de volledigheid en strengheid van behandeling.

De Heer Dr. J. Rozenberg, Amsterdam, informeert nader, hoever de inleider met de Herhaling en Uitbreiding van het getalbegrip in de hogere klassen wil gaan.

De inleider wenst hierbij maat te betrachten. De vrees is niet denkbeeldig, dat men te veel van de leerlingen gaat eisen en verwachten. De inleider wijst er nogmaals op, dat het program voor de hogere klassen zeer gevuld is, en dat hij bijv. dit jaar, ook al is dan het nieuwe program op zijn school officiëel reeds ingevoerd, geen tijd kan vinden voor behandeling èn van het complexe getal èn van de integraalrekening: deze laatste is er bij ingeschoten. Hoever er bij het complexe getal gegaan kan worden, heeft de inleider reeds in zijn voordracht uiteengezet; met het onmeetbare getal kan men z.i. afmaken wat in de tweede klasse werd overgeslagen, i. h. b. de verificatie van de eigenschappen der bewerkingen.

De Heer J. van Andel, Inspecteur der Lycea, die als vertegenwoordiger van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen de vergadering bijwoonde, deelde o.a. mede, dat de leraren uit het feit, dat de complexe getallen in het nieuwe leerplan niet met name genoemd zijn, niet moeten afleiden, dat het gewenst zou zijn, deze leerstof voortaan maar onbehandeld te laten. Hij is van oordeel, dat de leraar, die met liefde en toewijding van dit belangwekkende stuk leerstof een mooi geheel weet te maken, de gelegenheid niet moet laten voorbijgaan, omdat hij er zowel de scholing van het verstand als de aansluiting aan het Universitair Onderwijs door kan bevorderen.

DE DIFFERENTIAALREKENING EN HET LIMIETBEGRIP OP DE MIDDELBARE SCHOOL [1])

DOOR

J. C. H. GERRETSEN (Groningen).

Om een zuiver oordeel te verkrijgen over de waarde van een bepaald onderdeel van de wiskunde voor de geestelijke vorming van onze leerlingen is het van grote betekenis een antwoord te vinden op de vraag naar de doelstelling van het wiskundeonderwijs op de middelbare school. Ten aanzien van deze doelstelling bestaat een groot aantal soms zeer uiteenlopende meningen, waardoor het zoeken naar een richtlijn voor de verkrijging van algemeen aanvaardbare maatstaven haast een hopeloze onderneming schijnt. Dit weinig bemoedigende aspect mag ons echter niet uit het oog doen verliezen, dat deze verscheidenheid in opinies een zeer goede zijde heeft. De didactiek van de wiskunde moet daardoor steeds weer als probleem gezien worden en verplicht ons om in critische bezinning te streven naar objectieve normen.

Velen zien als voornaamste taak van het wiskundeonderwijs het aanbrengen van een aantal vaardigheden en kundigheden ter voorbereiding voor latere vakstudie. Het doel achten zij bereikt, wanneer de leerling een zodanige mate van geoefendheid heeft verkregen in de uitvoering van technisch-mathematische operaties, dat bij de latere kennismaking met diepergaande wiskundige problemen voor het begrijpen daarvan geen hinder wordt ondervonden van het gebrek aan beheersing van het rekenapparaat. Deze mening wordt gestaafd met het argument, dat de leerlingen op de middelbare school over het geheel genomen niet in staat geacht kunnen worden om inzicht te verkrijgen in mathematische kwesties, die boven het louter formele uitgaan. Voor hen bevat het nieuwe leerplan elemen-

[1]) Voordracht gehouden te Amsterdam op 28 December 1939 bij gelegenheid van de jaarlijkse Algemene Vergadering van de Vereniging van leraren in de wiskunde, de mechanica en de kosmografie aan hogere burgerscholen en lycea.

ten, die een gevaar kunnen betekenen voor de doeltreffendheid van het onderwijs. De infinitesimaalrekening is voor de belijders van deze overtuiging een ware steen des aanstoots.

Het kan niet worden ontkend, dat onze dagelijkse ervaringen aan het genoemde argument veel steun verlenen. Op grond van die ervaringen geloof ik dan ook, dat in de eerste drie klassen bij het onderwijs de beperking tot in hoofdzaak formele dingen het verstandigst is en het meeste effect sorteert. Naar mijn mening zou het echter onjuist zijn, wanneer men deze gedragslijn in de vierde en de vijfde klasse zou willen blijven volgen. Men behoort rekening te houden met de omstandigheid, dat de geestelijke structuur van de leerlingen in de hogere klassen gemiddeld een andere is, dan die van de leerlingen in de lagere klassen. De post-puberteit betekent in de ontwikkeling van de jonge mens een belangrijke en vooral ook gevoelige periode. Het zou daarom van een onvoldoend begrip van de taak van de docent getuigen, wanneer men voor dit feit blind zou willen zijn.

Ik geloof stellig, dat de zeer verbreide onbemindheid van de wiskunde voor een goed deel het gevolg is van de onvoldoende bevrediging der geestelijke behoeften van onze adolescenten. Daarom beschouw ik het als een ernstige fout om zich bij het onderwijs te beperken tot het oefenen van louter machinale verrichtingen, waarvoor de leerlingen slechts matige belangstelling hebben en waarvan zij het nut niet kunnen begrijpen.

Het komt mij zeer wenselijk voor, dat in de hogere klassen gewezen wordt op het feit, dat de wiskunde geen geïsoleerde positie inneemt in het geestesleven, maar wijdvertakt in de algemene cultuur wortelt, en onze leerlingen moeten iets ondervinden van de bekoring, die uitgaat van het inzicht in de samenhang van de wiskundige denkwereld met de geestelijke ontwikkeling van de mensheid.

Van dit standpunt bezien betekent de invoering van de infinitesimaalrekening op de middelbare school een grote vooruitgang. De invloed van dit onderdeel van de wiskunde, direct en indirect, op het algemene wereldgebeuren is van een vérstrekkende betekenis; een juist inzicht in de wording van onze Westerse beschaving met haar enorme technische mogelijkheden is bijkans onmogelijk, wanneer men op dit feit geen acht zou willen slaan.

De infinitesimaalrekening leent zich bizonder goed voor een behandeling op historische grondslag. Ik zeg dit, niet om hiermede een nieuwe mode te propageren, maar op grond van de overtuiging, dat de geschiedkundige beschouwing zeer vaak de bodem is, waarop de belangstelling het best gedijd. En het wekken van belangstelling behoort immers tot de uitgangspunten van elke didactiek.

Het is erg jammer, dat een samenvattend overzicht van de ontwikkeling van de infinitesimaalrekening in onze taal ontbreekt. In het boek van Dr. Beth over de „Principia" van Newton kan men over dit onderwerp wel het een en ander aantreffen, maar een enigszins volledig beeld kan daarmede niet verkregen worden. Het lijkt mij zeer wenselijk, dat deze leemte binnen afzienbare tijd wordt aangevuld, waardoor aan de docenten op gemakkelijker wijze dan thans het geval is, de mogelijkheid wordt geboden om zich ook op dit terrein te oriënteren.

Niettemin is dit alles tot onvruchtbaarheid gedoemd, al zijn we nog zo idealistisch gestemd ten aanzien van de taak van de docent en al zijn we nog zo vervuld van geestdrift voor onze wetenschap, wanneer we ons daarnaast niet zeer ernstig bezinnen op de practisch-didactische moeilijkheden, waarvoor we bij het onderwijs in de infinitesimaalrekening geplaatst worden. In één voordracht kunnen bezwaarlijk alle moeilijkheden en vraagpunten aan de orde gesteld worden. Ik zal mij daarom in hoofdzaak tot die onderwerpen beperken, die naar het mij wil voorkomen, van principieel belang zijn.

Daar is in de eerste plaats de door Leibniz ingevoerde notatie voor de afgeleide functie. De beroemde aanduiding met $\frac{dy}{dx}$ heeft reeds zo vaak aanleiding gegeven tot misvattingen en is reeds zo menigmaal de bron geweest van de dolste speculaties, vooral op philosofisch terrein, dat een zekere reserve met betrekking tot de introductie van deze symboliek op de school voldoende reden van bestaan heeft.

In de schoolboeken wordt het symbool $\frac{dy}{dx}$ gepresenteerd als een samentrekking in schrijfwijze voor het gecompliceerde proces $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; eenstemmig knoopt men daaraan steeds de waarschu-

wing vast, dat $\frac{dy}{dx}$ niet mag worden beschouwd als een quotient, terwijl men desondanks toch van differentiaalquotient spreekt. Hoewel tegen deze handelwijze uit een wetenschappelijk oogpunt weinig is in te brengen, moet het bij onze leerlingen toch bevreemding wekken, wanneer men aan dingen namen geeft, die ze eigenlijk niet mogen hebben. Veel erger wordt het natuurlijk, wanneer men, zoals ik nog in een schoolboek zag, van een quotient van oneindig kleine grootheden gaat spreken en zich verder in een volkomen stilzwijgen hult aangaande de aard van die grootheden.

Door aldus te handelen lijkt het mij toe, dat men bezig is domme dingen te doen en ik zie niet in welk nut het kan hebben om reeds bij de aanvang de leerlingen af te schrikken met een listig woordenspelletje.

In de grond van de zaak gaat het immers om het volgende. Gegeven is een vlakke kromme met vergelijking $y = f(x)$ ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel. Intuïtief is het volkomen duidelijk, wat men moet verstaan onder de raaklijn in een punt A van de kromme. De leerlingen zijn reeds in het bezit van het begrip richtingscoefficient. Welnu, onder de *helling van de kromme in* A kan worden verstaan de richtingscoefficient van de raaklijn in A. Uit de tekening blijkt verder, dat de helling bepaald is, zodra de abscis van A bekend is, m.a.w. de tekening geeft het voorschrift voor de bepaling van de helling bij een gegeven waarde van x. Aldus wordt langs aanschouwelijke weg uit de gegeven functie een nieuwe functie afgeleid, de *hellingfunctie* of *afgeleide,* welke met $f'(x)$ wordt aangeduid, of ook, hetgeen soms voordeel oplevert, met $Df(x)$. Het is zeer belangrijk, dat de geschetste procedure aan een concreet voorbeeld wordt doorgerekend. Daarvoor is zeer geschikt de quadratische functie $ax^2 + bx + c$. In de derde klas zal men allicht het probleem ter sprake hebben gebracht van de bepaling van de snijpunten van een rechte met de grafiek van de quadratische functie. Wanneer men rechten evenwijdig aan de y-as uitsluit, doen zich drie gevallen voor, te weten: de rechte heeft twee punten met de grafiek gemeen, de rechte heeft één punt met de grafiek gemeen en ten slotte, de rechte heeft geen enkel punt met de grafiek gemeen. Analytisch blijken deze gevallen voor de dag gebracht te kunnen worden door de discussie van een vierkants-

vergelijking, die ontstaat als men uit de vergelijkingen van de rechte en van de grafiek de y elimineert. Men kan op die wijze volkomen exact een raaklijn definiëren als een rechte, die met de grafiek één punt gemeen heeft (met de restrictie, dat de rechte niet evenwijdig is aan de y-as). Het leggen van een raaklijn door een punt A van de grafiek met abscis x_0 leidt tot het voorschrijven van een dubbele wortel $x = x_0$ aan de reeds genoemde vierkantsvergelijking, waarbij dan de coefficienten voorkomende in de vergelijking van de rechte als parameters opgevat worden. De berekening leert [2]), dat de helling in A gelijk is aan $2ax_0 + b$, m.a.w. de hellingfunctie is $2ax + b$. Interessant is het om de helling uit te rekenen in de snijpunten van de grafiek met de x-as [3]); men vindt daarvoor

---

[2]) Om de bedoeling duidelijk te maken zal ik hier de berekening in extenso weergeven.

Laat y_0 de ordinaat van A zijn. Een niet evenwijdig aan de y-as lopende rechte door A heeft de vergelijking:

(1) $$y = m(x - x_0) + y_0.$$

De abscissen van de snijpunten van deze rechte met de kromme voorgesteld door:

(2) $$y = ax^2 + bx + c,$$

worden berekend uit de vierkantsvergelijking, die uit (1) en (2) ontstaat door eliminatie van y. Daarvoor wordt gevonden:

(3) $$m(x - x_0) + y_0 = ax^2 + bx + c.$$

Bedenken we, dat

(4) $$y_0 = ax_0{}^2 + bx_0 + c,$$

dan kunnen we voor (3) vinden:

(5) $$a(x^2 - x_0{}^2) + b(x - x_0) - m(x - x_0) = 0,$$

en na ontbinding in factoren:

(6) $$(x - x_0)\,(a(x + x_0) + b - m) = 0.$$

Deze vergelijking heeft een dubbele wortel x_0 als in het linkerlid ook de tweede factor voor $x = x_0$ gelijk is aan nul, m.a.w.:

$$2ax_0 + b - m = 0.$$

[3]) De uitdrukking $2ax_2 + b$ kan als volgt omgevormd worden:

$$2ax_2 + b = 2ax_2 - a(x_1 + x_2) = a(x_2 - x_1).$$

Spreken we nu af, dat steeds $x_1 \leqq x_2$ is, dan mogen we schrijven, met $\eta = \text{sign}\, a$:

$$a(x_2 - x_1) = \eta\sqrt{a^2(x_2 - x_1)^2} = \eta\sqrt{a^2(x_2 + x_1)^2 - 4a^2x_1x_2} = \eta\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Evenzo vindt men:

$$2ax_1 + b = -\eta\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Het spreekt wel vanzelf, dat bij deze afleiding ondersteld is, dat de uitdrukkingen:

$$a(x_1 + x_2) = -b, \quad ax_1x_2 = c,$$

onafhankelijk van de formule voor de wortels van een vierkantsvergelijking verkregen zijn.

$\pm \sqrt{b^2 - 4ac}$, zodat de nulpunten van de quadratische functie voldoen aan de vergelijkingen:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Daarmee wordt de bekende formule voor de oplossing van een vierkantsvergelijking op aardige wijze belicht. Natuurlijk kan men aan deze beschouwingen de bepaling van de uiterste waarde van de functie vastknopen door er op te wijzen, dat dit probleem neerkomt op het zoeken naar het punt van de grafiek, waar de raaklijn evenwijdig is aan de x-as en dus de helling nul heeft. Op die manier raken de leerlingen enigszins vertrouwd met de aard van het nieuwe probleemgebied.

Door aldus te handelen blijft men in de sfeer van de bekende zaken uit de lagere klassen en vermijdt men het optreden van een discontinuïteit in de leergang. Het spreekt wel vanzelf, dat men deze beschouwingen behoorlijk met tekeningen moet illustreren.

Op volmaakt dezelfde wijze kan men de homografische functie $\frac{ax+b}{cx+d}$ behandelen en het resultaat $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ voor de afgeleide vinden [4]; natuurlijk wordt de als bizonder geval hiervan optredende functie $\frac{1}{x}$ niet vergeten.

Het begrip afgeleide functie wordt op deze wijze spoedig het eigendom van de leerlingen en men behoeft niet te vrezen, dat

---

[4] Laat x_0 en y_0 de coördinaten zijn van een punt A behorende tot de kromme voorgesteld door

(1) $$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (ad - bc \neq 0;\ c \neq 0).$$

Dan is natuurlijk $cx_0 + d \neq 0$. De abscissen van de snijpunten van deze kromme met een niet aan de y-as evenwijdig lopende rechte door A voldoen aan de vergelijking:

(2) $$m(x - x_0) + y_0 = \frac{ax+d}{cx+b}.$$

Deze is gelijkwaardig met:

(3) $$(ax+b)(cx_0+d) - (ax_0+b)(cx+d) - m(x-x_0)(cx+d)(cx_0+d) = 0,$$

of

(4) $$(x - x_0)\,(ad - bc - m(cx+d)\,(cx_0+d)) = 0.$$

Voor $m = 0$ is de graad van deze vergelijking gelijk aan 1; dit geval sluiten we uit. De vergelijking heeft een dubbele wortel x_0, wanneer de tweede factor in het linkerlid voor $x = x_0$ de waarde nul aanneemt. Dus:

$$ad - bc - m\,(cx_0 + d)^2 = 0.$$

allerlei nevenzaken, zoals het limietbegrip en de symbolische notatie, die in dit stadium nog volkomen overbodig zijn, voor het verkrijgen van een juist inzicht belemmerend werken. In dit verband lijkt het mij goed er op te wijzen, dat de geschetste gang van zaken alleen succes belooft, als in de lagere klassen het functiebegrip grondig is besproken en de grafische voorstellingen niet slechts als een aanhangsel van de leerstof opgediend worden. Dat men hiermede in de lagere klassen aan de leerlingen te zware eisen zou stellen zal toch wel niemand meer in ernst willen beweren.

Wanneer het begrip afgeleide functie voldoende is geassimileerd, is de tijd aangebroken om een stap verder te gaan en een meer critische houding aan te nemen met betrekking tot het begrip raaklijn. De leerlingen moeten inzien, dat de intuïtieve aanvaarding van het begrip raaklijn ons in een impasse brengt, wanneer we het tangentenprobleem voor andere dan de reeds genoemde functies willen oplossen. De methode, die bij de quadratische en de homografische functie zoveel succes had, faalt bijvoorbeeld bij de functie sin x. Daarmede wordt de behoefte gevoeld aan een meer omvattende definitie, die als vanzelf te voorschijn komt, als we de raaklijn definiëren op de bekende wijze met behulp van de verzameling der snijlijnen door het punt, waarin de raaklijn aan de kromme moet worden aangebracht. Deze algemene analytische definitie toont reeds dadelijk zijn bruikbaarheid, omdat het mogelijk blijkt andere begrippen, zoals het begrip snelheid, het begrip hoeksnelheid, enz. scherp mathematisch te omschrijven [5]). Bij het snelheidsbegrip verkeren we in de aangename omstandigheid, dat daarvan reeds een duidelijke aanschouwelijke voorstelling aanwezig is, terwijl deze bij het begrip afgeleide functie eerst aan de hand van grafieken ontwikkeld moet worden.

Natuurlijk moeten we reeds van te voren de nodige aandacht aan het limietbegrip besteed hebben en de behandeling daarvan niet uitstellen tot het tijdstip, waarop de noodzaak zich bij de differentiaalrekening doet gevoelen. Er is immers reeds eerder een aanleiding om dit begrip te introduceren, nl. bij de sommering van de

---

[5]) Het verdient aanbeveling om melding te maken van de notatie van Newton $\dot{f}(t)$ voor de afgeleide (fluxie) van een functie, als de tijd als onafhankelijk veranderlijke optreedt; deze notatie is nauw verwant met de accentennotatie.

oneindig voortlopende meetkundige reeksen. Men dient er evenwel rekening mede te houden, dat er geruime tijd mee gemoeid kan zijn, aleer de leerlingen voldoende met het begrip vertrouwd zijn geraakt. Vandaar dat ik aarzel om het te gebruiken als een *basis* voor het bijbrengen van het begrip afgeleide functie. Het gevaar lijkt mij niet denkbeeldig, dat dit laatste begrip met dezelfde achterdocht wordt bejegend als het eerstgenoemde, wanneer men zich op het standpunt stelt, dat de eerste kennismaking met de differentiaalrekening alleen via het limietbegrip kan geschieden.

Zodra we in het bezit zijn van de analytische definitie van het begrip afgeleide, biedt de afleiding van de bekende rekenregels weinig moeilijkheden. De in de grond van de zaak eenvoudige techniek van het differentiëren hebben de leerlingen spoedig onder de knie. Het lijkt mij niet ondienstig om de regels voor het product en het quotient van functies ook te geven voor de logarithmische afgeleide; daarvoor is immers de kennis van de afgeleide van de logarithme niet nodig, want het is een zuiver formele aangelegenheid. De structuur van de formules wordt evenwel door deze kunstgreep veel doorzichtiger.

Voor de formulering van de rekenregels kan de notatie van Leibniz gemist worden; de formules zijn even overzichtelijk in de accentennotatie en in de notatie met de *D*.

De volgende vraag wil ik nog met U bespreken. Moeten we ook de kettingregel, dus de regel voor het differentiëren van de samengestelde functies, behandelen? Erg nodig lijkt mij dit niet, zelfs bestaat het gevaar, dat men dan spoedig weer vervalt in de fout van het opgeven van ingewikkelde vraagstukken en de differentiaalrekening laat ontaarden in ongebreidelde „sommenmakerij”. Daarbij komt nog, dat een exact bewijs van de kettingregel voor de leerlingen te moeilijk is; de bewijzen in de schoolboeken zijn zonder uitzondering onvolledig [6]). Deze regel vindt eigenlijk zijn fraaiste toepassing in de integraalrekening bij het invoeren van nieuwe veranderlijken. En het schijnt, dat men zover niet met de integraalrekening wil gaan.

De weglating van de kettingregel betekent echter, dat een van

---

[6]) En niet alleen in schoolboeken! Een correct bewijs kan men vinden bij: Landau, E. *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung* (Groningen 1934), p. 80.

de voornaamste argumenten, die pleiten voor de invoering van de notatie van Leibniz in het begin van de differentiaalrekening, komt te vervallen. Men moet vooral de nadelen van een te snelle kennismaking met deze notatie niet onderschatten. Eén van mijn bezwaren is, dat de schrijfwijze $\frac{dy}{dx}$ als afkorting voor een limiet-procedure onwillekeurig aanleiding geeft tot het optreden van ongewenste associaties. Bovendien zie ik niet in op welke wijze de schrijfwijze $\frac{d^2y}{dx^2}$ voor de tweede afgeleide verklaard moet worden, als men de opvatting huldigt, dat in de notatie het grensproces verdisconteerd is, terwijl toch de schrijfwijze y'' of D^2y volkomen begrijpelijk is.

In dit verband is het interessant om de historische situatie aan een onderzoek te onderwerpen. Tijdens zijn verblijf in Parijs van 1672 af heeft Leibniz kennis genomen van de werken van zijn directe voorgangers, waaronder in de eerste plaats Descartes, Pascal en Cavalieri genoemd moeten worden. Een zo uitgesproken op organisatie gerichte geest als die van Leibniz kon geen bevrediging vinden bij de verschillende los van elkaar staande methoden voor het oplossen van het tangentenprobleem en het probleem van de quadraturen, zoals hij die in de door hem bestudeerde geschriften aantrof. Hij zocht daarom naar een universeel tekenschrift, waarmede in de leer der oneindig kleinen een algorithmus opgebouwd kan worden, die in productiviteit en gemakkelijke hanteerbaarheid bij de rekenmethoden van de gewone algebra niet achterblijft. Met de door hem ontworpen rekenwijze is hij daarin geslaagd; zijn tekenschrift levert inderdaad een „novum calculi genus", een nieuwe manier van rekenen. Het is moeilijk om met zekerheid te zeggen, wat Leibniz zijn symbolen dx en dy, die voor hem zelfstandige grootheden waren, gedacht heeft. Het is niet onwaarschijnlijk, dat Leibniz voor de rechtvaardiging van zijn manier van rekenen een beroep wenste te doen op het limietbegrip, maar ik geloof toch, dat men hieraan niet te veel betekenis moet hechten en dat de invloed van de indivisibilia van Cavalieri een hoofdrol heeft gespeeld bij de definitieve vormgeving aan de symbolen. Vóór alles was het Leibniz te doen om een rekenwijze, waarmede nieuwe resultaten gevonden

konden worden, een heuristisch hulpmiddel dus. De vraag naar de betekenis van de symbolen achtte men in de dagen van Leibniz niet van overwegend belang; men vroeg immers in die dagen ook niet naar de aard van de wortels uit negatieve getallen, terwijl men toch het volste vertrouwen schonk aan de daarmede verrichte berekeningen. Het oordeel van Leibniz over zijn methode spreekt heel duidelijk uit een beroemde passage voorkomende in een brief aan Tschirnhaus, die ongeveer als volgt luidt[7]:

„Men moet letten op het gemak van de tekens bij het vinden, dat het grootst is, zo vaak zij met weinig de innerlijke aard van de zaak uitdrukken en als het ware afbeelden, immers zo wordt op wonderbaarlijke wijze de denkarbeid verminderd. Zodanige tekens zijn nu door mij aangewend in de rekening van de quadratuurvergelijking, door welke ik dikwijls zeer moeilijke problemen in weinig regels oplos."

De infinitesimaalrekening is niet het werk van één man, zelfs niet van één generatie. Van Euklides en Archimedes af hebben de wiskundigen zich steeds op de een of de andere wijze met infinitesimaalproblemen bezig gehouden; Leibniz bezit echter de verdienste een calculus te hebben ontworpen, die de volgende generaties in staat hebben gesteld een voordien ongekende productiviteit aan de dag te leggen.

De directe opvolgers van Leibniz dachten bij de symbolen *dx* en *dy* aan actueel oneindig kleinen, waarvan zij meenden een voldoend duidelijke en betrouwbare voorstelling te bezitten. Dit blijkt bijvoorbeeld zonneklaar uit een passage voorkomende in het eerste leerboek der differentiaal- en integraalrekening, dat De l'Hospital in 1696 onder de titel *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* liet verschijnen en dat sindsdien meer dan eens een herdruk beleefde. Deze mathematicus onderhield persoonlijke relaties met Leibniz en stond voortdurend met

---

[7]) Zie: Gerhardt C. J. *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern* (Berlin 1899), p. 375. De oorspronkelijke tekst luidt: „In signis spectanda est commoditas ad inveniendum quae maxima est, quoties rei naturam intimam paucis exprimunt et velut pingunt, ita enim mirifice imminuitur cogitandi labor. Talia vero sunt signa a me in calculo aequationum tetragonisticarum adhibita, quibus problemata saepe difficilima paucis lineis solvo."

hem in briefwisseling. In het genoemde werk kan men het volgende aantreffen: „La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la différence . . . . On se servira dans la suite de la note ou caractéristique *d* pour marquer la différence.”

We zien hieruit, dat „différence” een zelfstandig grondbegrip aanduidt, waarvan dus een nadere omschrijving overbodig geoordeeld werd.

Zoals bekend heeft het zeer lang geduurd aleer men het oneindig kleine uit de wiskunde heeft kunnen bannen. Het moderne begrip differentiaal heeft met oneindig klein niets meer te maken. Het begrip afgeleide is primair; met behulp daarvan wordt de differentiaal van een functie gedefiniëerd als het product van de afgeleide van de functie en een nieuwe variable h, dus $dy = y' h$. Voor h kan dan dx geschreven worden, zoals blijkt door de definitie op de functie x toe te passen. We zien dan, dat y' opgevat mag worden als *een werkelijk quotiënt van twee differentialen,* als een *differentiaalquotiënt.* Naar mijn mening moeten we ook op deze wijze het begrip differentiaal op de school introduceren, maar dan aan het einde van de differentiaalrekening als voorbereiding voor de notatie in de integraalrekening. Het symbool $\int f\,dx$ voor de onbepaalde integraal duidt een functie aan, waarvan de differentiaal gelijk is aan $f\,dx$. Aldus beschouwd blijken de $\int$ en de d inverse operatoren te zijn, geheel in de lijn van de opvattingen van Leibniz.

Zoals ik U reeds zeide, kan met een aanschouwelijke definitie van het begrip afgeleide — hoe belangrijk ook voor de eerste kennismaking — niet volstaan worden. Op de duur kunnen we het niet stellen zonder de analytische definitie, die verankerd is in het limietbegrip. Het limietbegrip is het tweede belangrijke punt van mijn voordracht, dat ik voor U wil bespreken.

Zonder enige twijfel behoort het limietbegrip tot een der moeilijkste begrippen, die op de middelbare school geleerd moeten worden. Het is daarom dan ook heel begrijpelijk, dat velen de overtuiging zijn toegedaan, dat het middelbaar onderwijs door het expliciet opnemen van dit begrip in zijn programma, geestelijk boven zijn stand is gaan leven. Ook de historische ontwikkeling van onze wetenschap leert duidelijk, dat het zeer lang heeft ge-

duurd alvorens men het begrip zodanig kon arithmetiseren, dat het als grondslag voor scherpe bewijsvoering bruikbaar was.

De bedoeling van het limietbegrip is het uitbannen van het actueel oneindig kleine; het wijst de weg tot het verkrijgen van een helder inzicht in het wezen van de infinitesimaalrekening. De moderne didactiek ziet zich nu de taak opgedragen om deze weg begaanbaar te doen zijn ook voor hen, die slechts over bescheiden geestelijke middelen beschikken.

Wanneer we de schoolboeken raadplegen, blijkt het, dat de meerderheid van de schrijvers het niet aandurft om een exacte arithmetische definitie van het limietbegrip te geven. Zij volstaan met omschrijvingen in woorden, die wel enigszins de bedoeling weergeven, maar bij critisch onderzoek in de regel zinledig blijken te zijn. Ik wil hier een kleine bloemlezing samenstellen uit enkele der voornaamste leerboeken:

1. Stoelinga en Van Tol, *Leerboek der Algebra* III, p. 3: Onder de limiet van een veranderlijke grootheid verstaat men het (vaste) getal, waartoe de veranderlijke grootheid onbepaald dicht nadert.

2. Derksen en De Laive, *Leerboek der Algebra* III B, p. 46: Een limiet is een eindige standvastige grootheid, waartoe een veranderlijke grootheid steeds meer en meer nadert en wel zo, dat het verschil tussen die standvastige en de veranderlijke grootheid zo klein gemaakt kan worden als men zelf maar wil.

3. Rutgers en Pekelharing, *Leerboek der Algebra* IV, p. 59: Is een getal p_n afhankelijk van een veranderlijk getal n, dan verstaat men onder de limiet van p_n een standvastig getal q, zodanig, dat bij aangroeiende n het verschil tussen p_n en q steeds kleiner wordt en dat verschil tussen p_n en q zo klein gemaakt kan worden als we zelf willen, door n slechts groot genoeg te nemen.

4. Van Thijn en Kobus, *Algebraïsche Hoofdstukken*, p. 142: Men noemt het standvastige getal p de limiet, waartoe $f(x)$ nadert, als x onbepaald tot a nadert, indien aan de volgende twee voorwaarden is voldaan:

1e. er is steeds een waarde van x te bepalen in de buurt van $x = a$, waarvoor het verschil tussen het standvastige getal p en de functie een absolute waarde heeft, die kleiner is dan elk vooraf aangegeven willekeurig klein rekenkundig getal;

2e. dezelfde ongelijkheid geldt voor iedere waarde van x, die minder van a verschilt dan de bepaalde.

5. W ij d e n e s, *Algebraïsche vraagstukken* III, p. 38: Dat de variant t_n het getal A tot limiet heeft, wil zeggen, dat bij ieder positief getal ε een getal p kan worden aangegeven met de eigenschap, dat voor $n > p$ geldt $| A - t_n | < \varepsilon$.

6. I d e m, p. 44: Men zegt, dat de functie $f(x)$ voor $x = a$ de limietwaarde b heeft, als bij ieder positief getal ε een positief getal δ bestaat met de eigenschap, dat voor elke waarde van x, die voldoet aan $0 < | x - a | < \delta$, geldt $| f(x) - b | < \varepsilon$.

Ik heb de definities gerangschikt volgens opklimmende graad van nauwkeurigheid. De definities, welke door W ij d e n e s worden gegeven zijn wetenschappelijk volkomen correct. Ik heb echter de ervaring, dat deze z.g. ε-definities de leerlingen veel moeite geven, zelfs dan, als men ze met tekeningen toelicht. Dergelijke abstract logische definities ontberen het aanschouwelijke aequivalent; de arithmetische taal, waarin ze gesteld zijn, wordt door de leerlingen moeilijk verstaan. Aan het abstractievermogen van de doorsnee-leerling zijn nu eenmaal grenzen gesteld, die men niet straffeloos kan negeren. Maar al gelukt het dan misschien na veel inspanning om de definitie het eigendom te doen worden van de leerlingen en door hen zodanig gereproduceerd kan worden, dat zij daardoor er blijk van geven het wezen van de zaak aan te voelen, het bezwaar blijft bestaan, dat ze de definitie niet kunnen hanteren. Ook de voorstanders van de ε-formulering zullen toch wel aarzelen om de rekenregels voor limieten, inzonderheid de product- en de quotientregel, met behulp van deze definitie te bewijzen en dan vraag ik mij af, of de tijd, die men nodig heeft om de definitie aan te leren, wel nuttig besteed is.

We moeten nu een tweetal kwesties nader beschouwen. Allereerst hoe het komt, dat de ε-definitie zoveel moeite veroorzaakt, en verder, of de andere definities, die in zo grote verscheidenheid aangeboden worden, wel dezelfde zaak bepalen, sterker, of ze àl een zaak bepalen.

De meeste definities, waarmee onze leerlingen te maken krijgen, zijn zeer eenvoudig van structuur. Ze kunnen gekarakteriseerd worden met een slagzin uit de klassieke logica: *per genus proximum et per differentiam specificam.* Van een te definiëren begrip wordt

eerst vermeld tot welke klasse van begrippen het behoort; deze klasse is het *genus proximum*. Daarna wordt aangegeven door welk bizonder kenmerk het begrip in de klasse wordt bevoorrecht; dit kenmerk is de *differentia specifica*. Bijvoorbeeld: een gelijkbenige driehoek is een driehoek, waarvan twee zijden gelijk zijn. Het genus proximum omvat de driehoeken, de differentia specifica is de gelijkheid van twee zijden, welke bizonderheid niet aan alle driehoeken valt op te merken. Een bekende en veel voorkomende fout bij onze leerlingen is het weglaten of het onjuist vermelden van het genus proximum. Bijvoorbeeld: een ruit is een vierhoek, waarvan twee aangrenzende zijden gelijk zijn, in plaats van: een ruit is een parallelogram, enz.

Dit eenvoudige schema kan bij de limietdefinitie niet gehandhaafd worden. De zaak is namelijk deze, dat de differentia specifica beschreven wordt door een relatie, die zelf gelijktijdig meegedefinieerd wordt, terwijl die relatie bovendien nog een gecompliceerde logische structuur bezit. Misschien zijn er onder U beoefenaars van de logistiek, die me met gefronsd voorhoofd zouden willen toevoegen, dat het nog véél ingewikkelder is; ik hoop het echter zo al erg genoeg voorgesteld te hebben! Laat ik U liever een toelichting mogen geven aan de hand van een voorbeeld, waarvoor ik de definitie van de limiet van een getallenrij wil nemen.

Het genus proximum bestaat uit alle reële getallen; een limiet is namelijk een reëel getal, omdat ik complexe getallen buiten beschouwing wil laten. Terloops merk ik op, dat dus reeds bekend moet zijn, wat reële getallen zijn, een pijnlijke kwestie voor het middelbaar onderwijs! Naast het genus proximum heb ik voor de beschrijving van de differentia specifica nodig het begrip getallenrij A, bestaande uit de getallen $a_1, a_2, \ldots$ Ten slotte spreek ik een bewering uit, die ik wil aanduiden met R, en die als volgt luidt: Wanneer ε een gegeven positief getal is, dan bestaat er een getal N zodanig, dat voor ieder natuurlijk getal $n > N$ voldaan is aan de ongelijkheid $| a_n - l | < \varepsilon$ voor een zeker reëel getal l.

R is dus een bewering, die betrekking heeft op de getallenrij A en het getal l. Is de bewering waar, dan zeg ik, dat l de limiet is van A. De differentia specifica bestaat dus in het constateren van het waarheidskarakter van R. De logische bouw van R is niet eenvoudig. Immers, in R komen voor de symbolen ε, N en n en wel op

verschillende wijze. R is namelijk ten aanzien van ε van een algemeen karakter: ε kan immers willekeurig uit een vooraf gegeven verzameling gekozen worden; R is ten aanzien van N van een existentieel karakter: immers het bestaan van een getal N met een zekere eigenschap wordt vastgesteld; ten slotte is R weer ten aanzien van n van een algemeen karakter.

Ik wil de vivisectie op het limietbegrip niet verder voortzetten; het is genoeg geconstateerd te hebben, dat het geen wonder is, als onze leerlingen niet meekunnen, wanneer we dit gecompliceerde denkproces met arithmetische symbolen in een enkele volzin comprimeren.

We willen nu onderzoeken in hoeverre de geciteerde definities er in slagen het limietbegrip te karakteriseren.

Ik beschouw eerst definitie 1. Het genus proximum is hier duidelijk beschreven als de verzameling der getallen. De uitdrukking „vast getal" is een pleonasme. De differentia specifica manifesteert zich als een relatie tussen een getal en een z.g. veranderlijke grootheid, die omschreven wordt met de term „onbepaald naderen tot". Deze termen zijn veel te vaag. Wat moet men verstaan onder een veranderlijke grootheid? Heeft het zin om te zeggen, dat een driehoek, waarvan de hoekpunten zich langs rechten bewegen onbepaald dicht nadert tot het getal 5?

Met een dergelijke definitie is er geen sprake van, dat de leerlingen inzicht krijgen in de grensprocessen. Ze missen de contrôle over hetgeen feitelijk geschiedt en ze moeten wel de indruk krijgen, dat het bij limietprocessen niet eerlijk toegaat.

Ik beschouw nu definitie 2. Deze definitie lijkt veel op de vorige, maar nu is het genus proximum onvoldoende beschreven. Wat wordt namelijk bedoeld met een standvastige grootheid? Er wordt gesproken van verschil van grootheden, zodat we kunnen vermoeden, dat bijvoorbeeld een driehoek geen grootheid is. Maar is bijvoorbeeld een verzameling een grootheid? We kunnen immers wel degelijk spreken van een verschil van twee verzamelingen. Overigens zou ik bij deze definitie dezelfde opmerkingen kunnen maken als bij de vorige.

Ik ga over tot definitie 3. Behalve het pleonasme „standvastig getal" treffen we de term „veranderlijk getal" aan. Hieraan kan evenwel geen betekenis gehecht worden. Dit is een voorbeeld van

een zeer verbreide begripsverwarring tussen de terminus technicus „veranderlijke" en het getal, dat voor een veranderlijke in de plaats kan treden. Ik zal dit toelichten. De volzin: „x is groter dan x^2", is grammaticaal in orde, maar is geen logisch oordeel, dat weerlegd kan worden of als juist kan worden erkend. Hierin is het symbool x een *veranderlijke*. Wanneer we x door een getal vervangen ontstaat uit de opeenvolging van woorden een bewering, die bijvoorbeeld juist is, als voor het getal $1/2$ genomen wordt, maar onjuist, wanneer 2 dit getal is. Het is evenwel een dwaasheid om te beweren, dat een veranderlijk getal groter is dan zijn kwadraat.

Afgezien van dit bezwaar, valt nog verder op te merken, dat de relatie tussen p_n en q onvolledig is beschreven. Men zou nu kunnen menen, dat bijvoorbeeld $\frac{1}{n} + (-1)^n$ de limiet 1 heeft, maar ook de limiet —1.

Ik kom nu tot definitie 4. Hier is gelukkig de term „veranderlijk getal" verdwenen en vervangen door „functie". Een verdienste van de definitie is verder het inzicht, dat de relatie tussen functie en limiet uitvoerig moet worden beschreven. De beschrijving is evenwel niet feilloos. Allereerst moet ik aanmerking maken op de uitdrukking „in de buurt van". De betekenis daarvan is wel intuïtief duidelijk, maar het gebruik van de term wordt door de onder 2e. geformuleerde volzin overbodig gemaakt. We hebben hier een aardig voorbeeld van wat men in de logica noemt een hysteron-próteron, de beschikking bij voorbaat over een term, die naderhand nog omschreven wordt. Een blijkbaar niet bedoeld effect heeft de opneming van het woord „elk" in de volzin onder 1e. Immers, daaruit volgt noodzakelijk, dat het verschil tussen de functie en het getal p *gelijk* is aan nul, want 0 is het enige niet-negatieve getal, dat kleiner is dan *elk* positief getal.

Door het aanbrengen van enkele wijzigingen kunnen we de definitie behoorlijk correct maken, en wel op de volgende manier:

Men noemt het getal p de limiet van de functie $f(x)$, als x onbepaald nadert tot a, indien aan de volgende twee voorwaarden voldaan is:

1e. er is steeds een van a verschillende waarde van x te bepalen, waarvoor het verschil tussen het getal p en de functie een absolute waarde heeft kleiner dan een vooraf aangegeven positief getal;

2e. dezelfde ongelijkheid geldt voor iedere waarde van x, die minder van a verschilt dan de bepaalde.

Ik heb in de plaats van „nadert tot een limiet" genomen „heeft een limiet". Immers een constante heeft evenzeer een limiet, die in dit geval aan de constante gelijk is; het woord naderen zou hier niet erg op zijn plaats zijn. Bovendien wekt de term enigszins de suggestie, als zou het verschil tussen de functie en de limiet monotoon kleiner worden, en dat behoeft lang niet altijd het geval te zijn.

Als algemene opmerking zou ik nog deze willen maken. Vele schrijvers achten zich door het geven van de definitie van limiet van een getallenrij, of wat daarvoor doorgaat, ontslagen van de plicht om ook de limiet van een functie te definiëren. Dat is een misvatting, waartegen ernstig gewaarschuwd moet worden. Men behoort wel degelijk de verschillende gevallen scherp te onderscheiden, waarbij het dan zeer belangrijk is om te wijzen op de analogie in de gedachtengang.

Na zoveel critiek zal bij U onwillekeurig de vraag opkomen of ik daar nog iets positiefs tegenover kan stellen. Ik zal het proberen. Ik heb de indruk, dat er een redelijke kans op succes bestaat in de overwinning van de moeilijkheden, wanneer we een opeenstapeling van begrippen in één volzin trachten te voorkomen; we moeten de limietdefinitie als het ware in etappes meedelen. Daartoe voer ik een paar spreekwijzen in, waarvan de betekenis nauwkeurig kan worden omschreven.

Laat E een bewering zijn, betrekking hebbende op de natuurlijke getallen n. Ik zeg, *dat E waar is voor voldoend grote waarden van n*, of ook, *dat E op de duur waar is*, als er een getal N bestaat zodanig, dat E waar is voor àlle natuurlijke getallen $> N$ [8]).

---

[8]) Met een paar eenvoudige voorbeelden kan dit worden toegelicht.

I. *Voor voldoend grote waarden van n is $\frac{1}{n}$ kleiner dan* 10^{-2}, of ook, $\frac{1}{n}$ *is op de duur kleiner dan* 10^{-2}.

Immers, de bewering: „$\frac{1}{n}$ is kleiner dan 10^{-2}" is waar voor alle natuurlijke getallen $n > 10^2$.

II. *Voor voldoend grote waarden van n is 2^n groter dan* 10^3, of ook, 2^n *is op de duur groter dan* 10^3.

Immers, de bewering: „2^n is groter dan 10^3" is waar voor alle natuurlijke getallen $n > 9$.

Onder de *afwijking* van twee getallen zal ik verstaan de absolute waarde van hun verschil. Ik kan ook zeggen, dat de genoemde absolute waarde het bedrag is, waarmede de getallen van elkaar afwijken.

De limiet l van een getallenrij $a_1, a_2, \ldots$ kan nu als volgt gedefinieerd worden:

Het getal l is limiet van de getallenrij als de getallen van de rij willekeurig weinig afwijken van l zodra de indices n voldoende groot zijn.

Men kan zelfs nog iets beknopter formuleren:

Het getal l is limiet van de getallenrij als de getallen van de rij op de duur willekeurig weinig van l afwijken.

De term „willekeurig weinig" kan als volgt gepreciseerd worden. Zij ε een positief getal, dat willekeurig gekozen kan worden, hetgeen niets anders betekent dan dat de enige eis, die aan ε gesteld wordt, bestaat in het positief zijn. Ik beschouw de ongelijkheid $| a_n - l | < \varepsilon$. Dit is een bewering betrekking hebbende op het natuurlijke getal n. In de definitie wordt tot uitdrukking gebracht, dat deze bewering op de duur juist is [9]).

Bij functies gaat het precies eender als we de limiet willen definiëren voor $x \to \infty$, terwijl de limiet voor $x \to -\infty$ tot dit geval door tekenwisseling teruggebracht kan worden. Iets moeilijker wordt het als we de limiet voor $x \to a$ willen definiëren.

Laat E een eigenschap zijn betrekking hebbende op een verzameling van reële getallen x, die van a verschillend zijn. Ik zeg, *dat E waar is voor voldoend dicht bij a gelegen waarden van x,* als er positief getal δ bestaat zodanig, dat E waar is voor alle getallen x van de verzameling, die aan $0 < | x - a | < \delta$ voldoen [10]).

---

[9]) Als voorbeeld neem ik het bewijs van:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1.$$

Daartoe moet beschouwd worden de ongelijkheid:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

waabij ε een positief getal voorstelt. Aan deze ongelijkheid is voldaan door alle natuurlijke getallen $n > 1/\varepsilon^2$, dus „op de duur".

[10]) Hier volgen weer een paar eenvoudige voorbeelden:

I. cos x *is groter dan* $1/_2$ *voor voldoend dicht bij nul gelegen waarden van x.*

De limiet l voor $x \to a$ van de functie $f(x)$ kan nu als volgt gedefiniërd worden:

Het getal l is limiet van de functie voor $x \to a$, als de functiewaarden willekeurig weinig van l afwijken zodra de waarden van x voldoend dicht bij a gelegen zijn.

De term „willekeurig weinig" kunnen we weer preciseren. Zij ε een positief getal. Ik beschouw de ongelijkheid $|f(x) - l| < \varepsilon$. Dit is een bewering betrekking hebbende op de getallen $x \neq a$, waarvoor de functie gedefinieerd kan worden. In de definitie wordt tot uitdrukking gebracht, dat de bewering waar is voor voldoend dicht bij a gelegen waarden van x [11]).

De gevolgde weg blijkt ook te leiden naar de definitie van raak-

---

Immers, aan de ongelijkheid

$$\cos x > {}^1/_2$$

is stellig voldaan door alle getallen x, die aan

$$0 < |x| < \frac{\pi}{3}$$

voldoen.

II. $\log (x-5)^2$ *is kleiner dan* -2 *voor voldoend dicht bij* 5 *gelegen waarden van x.*

Immers, de ongelijkheid

$$\log (x-5)^2 < -2$$

of

$$(x-5)^2 < 10^{-2}, \ (x \neq 5),$$

geldt voor alle getallen x, die voldoen aan:

$$0 < |x-5| < 10^{-1}.$$

[11]) Als een iets dieper gaand maar zeer instructief voorbeeld kan dienen het bewijs van

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Op de bekende manier wordt bewezen, dat voor $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ voldaan is aan:

(1) $$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

of ook

(2) $$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

We onderzoeken de ongelijkheid:

(3) $$1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon.$$

Blijkbaar behoeven we alleen te letten op positieve getallen $\varepsilon < 1$. Zij α het getal tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$, waarvoor geldt:

lijn. Zij A een gegeven punt van een gegeven kromme en laat P een punt van de kromme voorstellen, dat niet met A samenvalt. *De rechte t door A is raaklijn aan de kromme in A als de hoek tussen t en de snijlijn AP willekeurig weinig van nul afwijkt zodra de punten P een voldoend kleine afstand tot A hebben* [12]).

Ik pretendeer niet op feilloze wijze er in geslaagd te zijn alle moeilijkheden uit de weg geruimd te hebben, die bij het aanleren van de limietdefinities kunnen optreden. Toch zou ik een ernstige proefneming willen aanbevelen, omdat naar mijn mening de voorgestelde formuleringen gemakkelijk onthouden kunnen worden, aanschouwelijk kunnen worden toegelicht en een behoorlijke afspiege-

---

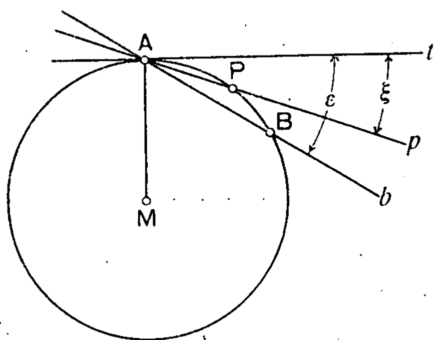
$$(4) \qquad 1 - \cos\alpha = \varepsilon.$$

Dan is wegens (2) aan (3) voldaan voor alle waarden van x, die voldoen aan:

$$0 < |x| < \alpha.$$

dus voor *voldoend dicht* bij 0 gelegen waarden van x *wijkt* $\frac{\sin x}{x}$ *willekeurig weinig* van 1 af.

12) Zij A een punt van een cirkel met middelpunt M en t de rechte door A loodrecht op AM. We denken ons door A een van t verschillende rechte b, die een hoek $\varepsilon \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ met t maakt. Omdat deze rechte een scherpe hoek met AM maakt is de afstand van M tot de rechte kleiner dan de straal van de cirkel, zodat b de cirkel in een tweede punt, B, snijdt. Zij $P \neq A$ een punt van de cirkelomtrek, die een afstand tot A bezit, welke kleiner is dan de afstand van B tot A. De hoek, die $AP = p$ met t maakt noemen we ξ.



Uit $t \perp AM$ volgt nu:

$$\angle AMB = 2\varepsilon, \quad \angle AMP = 2\xi.$$

Daar $AP < AB$ geldt op grond van een bekende planimetrische eigenschap:

$$\angle AMP < \angle AMB,$$

dus:

$$\xi < \varepsilon.$$

Daarmee is aangetoond, dat de hoek tussen t en AP *willekeurig weinig van nul afwijkt* zodra de punten P *voldoende dicht bij* A liggen, m.a.w. de rechte t is raaklijn in A aan de cirkel.

PROSPECTUS

HISTORISCHE STUDIËN

DOOR

Prof. Dr. Hk. DE VRIES,

III.



f 3.75, Geb. f 4.50

P. NOORDHOFF N.V. - 1940 - GRONINGEN—BATAVIA

IN DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR
en bij N.V. Uitgevers-Maatschappij
NOORDHOFF-KOLFF, Laan Holle 7
Batavia C.

VOORWOORD.

Bij het verschijnen van het derde deel van mijn „Historische Studiën" een enkel woord.

Het doel, dat ik bij het schrijven steeds voor oogen gehad heb, schijn ik tot op zekere hoogte toch wel bereikt te hebben, wat mij gebleken is uit tal van mondelinge, en ook schriftelijke uitlatingen, die mij in den loop der jaren geworden zijn, maar wat ook aan anderen kan blijken, indien zij een blik slaan in Studie XVI A, p. 57 van dit deel, waar niet ik aan het woord ben, maar mijn lezers het zijn.

Lagrange heeft eens over de groote verhandeling van Bezout, waarin voor de eerste maal het fameuze theorema voorkomt, dat het aantal gemeenschappelijke oplossingen van *n* volledige vergelijkingen met *n* onbekenden gelijk is aan het product van de graadgetallen, maar dat, als niet alle vergelijkingen volledig zijn, dit aantal geringer kan zijn, van Berlijn uit aan Laplace geschreven: „Je le mets (nl. den „Mémoire") dans le petit nombre de ceux, qui sont véritablement utiles aux progrès des sciences". „Petit nombre", en „véritablement utiles", deze woorden hebben mij in mijn lange leven van veel geschrijf weerhouden. Maar de ideeën en vondsten der grooten direct betrekken van den producent, in zijn eigen bewoordingen, en zonder het intermediair van den tusschenhandel, al is de verpakking dan ook gewoonlijk lang niet zoo prima als in de leerboeken, dat heeft voor mij altijd een onweerstaanbare bekoring gehad, èn dàn kon ik niet nalaten de pen op te vatten om ook anderen daarvan te doen genieten, zoo mogelijk met ophelderende uiteenzettingen van eigen vinding mijnerzijds. Zóó zijn de „Historische Studiën" ontstaan. Voor het 4e deel liggen alweer enkele opstellen op hun beurt te wachten.

Als steeds weer mijn hartelijken dank aan mijn oude getrouwen Wijdenes en Noordhoff, wier devies blijkbaar, ondanks den afschuwelijken tijd, dien wij weer beleven, ook nú nog is: business as usual.

Binyamina in Palestina

18 Dec. 1939.

INHOUD VAN HET EERSTE DEEL, 192 blz., *f* 2,50, geb. *f* 3,25

INHOUD VAN HET TWEEDE DEEL, 281 blz., *f* 3,75, geb. *f* 4,50

INHOUD VAN HET DERDE DEEL, 261 blz., *f* 3,75, geb. *f* 4,50

De drie deelen tezamen besteld ing. à *f* 9,—, geb. *f* 11,—.

---

23. Möbius spreekt in zijn drie verhandelingen nergens over de zoogenaamde „naderende breuken," van zijn kettingbreuken, met behulp waarvan men het als kettingbreuk gegeven getal systematisch hoe langer hoe beter kan benaderen, en die vooral voor oneindige kettingbreuken van groot belang zijn, omdat deze altijd irrationale getallen voorstellen, en een irrationaal getal natuurlijk slechts door rationale breuken te benaderen is. Zooals bekend is, geven de naderende breuken der kettingbreuken de beste naderende breuken die mogelijk zijn, wat eenvoudig zeggen wil dat indien bijv. $\frac{p}{q}$ een naderende breuk eener kettingbreuk is voor een getal x, het onmogelijk is dit getal beter te benaderen door een andere breuk, wier noemer kleiner is dan q; immers de noemer eener breuk bepaalt de complicatie, de teller is daarvoor onverschillig. Zoo is het bijv. onmogelijk het getal π beter te benaderen dan door de breuk $\frac{22}{7}$ met behulp van een breuk, wier noemer kleiner is dan 7, en ook niet door een breuk, die nauwkeuriger is dan $\frac{355}{113}$, en een kleineren noemer heeft.

Met behulp van onze hakenuitdrukkingen zijn de naderende breuken gemakkelijk toe te voegen. Schrijven wij de kettingbreuk duidelijkheidshalve in den vorm:

$$x = (a_0, a_1, a_2, \dots.),$$

dan is de eerste naderende breuk natuurlijk $(a_0) = \frac{1}{a_0}$ dus

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{[a_0]}.$$

De tweede is:

$$\frac{p_2}{q_2} = (a_0, a_1) = \frac{1}{a_0 - \frac{1}{a_1}} = \frac{a_1}{a_0 a_1 - 1} = \frac{[a_1]}{[a_0, a_1]} = \frac{[a_1]}{[a_0]a_1 - [\ ]}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = (a_0, a_1, a_2) = \frac{1}{a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2}}} = \frac{1}{a_0 - \frac{a_2}{a_1 a_2 - 1}} =$$

$$\frac{a_1 a_2 - 1}{a_0 a_1 a_2 - a_0 - a_2} = \frac{[a_1, a_2]}{[a_0, a_1, a_2]} = \frac{[a_1]\,a_2 - [\ ]}{[a_0, a_1]\,a_2 - [a_0]}.$$

Zoo voortgaande, vindt men:

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{[a_1, a_2, a_3]}{[a_0, a_1, a_2, a_3]} = \frac{[a_1, a_2]\,a_3 - [a_1]}{[a_0, a_1, a_2]\,a_3 - [a_0 a_1]}.$$ Enz.

ling zijn van de ε -definities. Ook aan hen, die dieper op de theorie willen ingaan, kunnen deze definities gemak opleveren. Laat ik ter toelichting de eigenschap bewijzen, *dat de limiet van een getallenrij éénduidig bepaald is;* een zeer belangrijke stelling, die, merkwaardig genoeg, in de leerboeken ternauwernood vermelding vindt. Gesteld namelijk, dat l_1 en l_2 van elkaar verschillende getallen zijn, die beide limiet zijn van een gegeven getallenrij. Op de duur wijken de getallen van de rij minder dan $\frac{1}{2} \mid l_1 - l_2 \mid$ van l_1 af en ook minder dan $\frac{1}{2} \mid l_1 - l_2 \mid$ van l_2. Dit is onmogelijk, omdat zulke getallen niet bestaan, hetgeen ten overvloede met een tekeningetje geïllustreerd kan worden.

Over dit onderwerp zou nog heel veel te zeggen zijn, maar ik moet mijn voordracht beëindigen. Wellicht heb ik enkelen onder U teleurgesteld door zovele vragen, die met de didactiek van de infinitesimaalrekening samenhangen, onbeantwoord te laten. Zij mogen echter bedenken, dat in het tijdschrift „Euclides" volop gelegenheid tot gedachtenwisseling geboden wordt; ik vlei mij met de hoop, daartoe te hebben aangespoord.

Vóór alles was het mijn bedoeling U er op te wijzen, dat de bij het onderwijs in de infinitesimaalrekening optredende moeilijkheden niet onderschat mogen worden en de moeite van het bestuderen alleszins waard zijn. Ik ben er echter van overtuigd, dat de moderne didactiek in staat geacht kan worden deze moeilijkheden te overwinnen.

Ten slotte nog dit. Ik gewaagde in het begin van mijn voordracht van de doelstelling van het wiskundeonderwijs op de middelbare school. Aan hetgeen ik daarover reeds gezegd heb zou ik nog het volgende willen toevoegen.

Wij zijn heden ten dage getuige van tragische gebeurtenissen, die onder meer een uitvloeisel zijn van het agressieve driftleven van de mens. Maar wij weten, dat het mogelijk is deze agressiviteit te sublimeren en op te heffen tot een positieve stimulans in het cultuurproces. In de wiskunde openbaart zich dit verschijnsel als het streven naar de beheersing van de door de fantasie verwekte voorstellingswereld door middel van de taal en de logische analyse.

Bij ons, wiskundedocenten, moet het besef levendig blijven, dat aan ons, door leiding te geven aan dit proces, een taak is opgedragen in het belang van de menselijke cultuur. Laat het voor ons een erezaak wezen om deze taak zo goed mogelijk te volbrengen.

Op de voordracht volgde een uitgebreide en zeer leerzame discussie, waaraan werd deelgenomen door de heren Hageman, Bronkhorst, Beth, Bos, Crijns, Geursen en Wansink.

DE DIFFERENTIAALREKENING EN HET LIMIETBEGRIP OP DE MIDDELBARE SCHOOL

DOOR

H. J. E. BETH (Amersfoort).

In de vergadering, waarin Dr. Gerretsen zijn belangrijke voordracht over bovenstaand onderwerp hield, heb ik reeds den spreker hulde gebracht voor de meesterlijke analyse, die hij gaf van de moeilijkheden, die de beruchte limietdefinitie voor de leerlingen heeft. Deze moeilijkheden heeft ze reeds van nature; de moeilijkheden worden nog vergroot door de te geringe kennis van de ongelijkheden, die de leerlingen in de 4de klasse meebrengen. En dit tekort aan kennis is geen gevolg van de moeilijkheden, die deze stof zouden aankleven, maar van de veel te ondergeschikte rol, die dit gewichtige onderwerp nog steeds in het onderwijs in de lagere klassen speelt; al eerder schreef ik hierover, zodat ik er nu niet op terug kom.

Op de definitie van den spreker zal ik geen kritiek uitoefenen; ze is natuurlijk volkomen in orde, en de formulering zal door de leerlingen gemakkelijker opgenomen worden dan de boven bedoelde. Voor mij blijft echter de vraag, en het is een vraag gebleven, ook na het antwoord, dat de spreker mij ter vergadering gaf, of het voordeel van zijn definitie blijft bestaan, als men er iets mee wil gaan *doen*. Dr. Gerretsen betwijfelt (blz. 209) of de

voorstanders van de ε-formulering niet zullen aarzelen om de rekenregels voor limieten met behulp van deze definitie te bewijzen. Ik ben er zeker van, dat ze die formulering voor de bewijsvoering zullen gebruiken; en juist daarin het grote voordeel van die formulering zien. En het is door het *gebruik*, dat de leerlingen er van maken, dat we de aanvankelijke moeilijkheden zien verdwijnen. Het voordeel van de definitie schijnt me hierin gelegen, dat ze een *algemene* weg aanwijst om stellingen aangaande limieten te bewijzen. En deze algemene weg is niet altijd dé kortste en de eenvoudigste (men vergelijke bij voorbeeld het bewijs, dat Dr. Gerretsen op bl. 217 geeft van de stelling, dat de limiet van een getallenrij éénduidig bepaald is, met het bewijs, dat ik in Schoolalgebra IV blz. 5 [1]) van diezelfde stelling gaf), maar didactisch geef ik aan een algemene weg de voorkeur.

KORRELS.

XLV. OVER DE AANDUIDING VAN HALVE PROJECTIEVLAKKEN.

Het is in leerboeken der Beschrijvende Meetkunde (volgens de methode der orthogonale parallelprojectie) veelal gebruikelijk, de halve vlakken, waarin de X-as het vlak der constructieteekening verdeelt, uitsluitend te omschrijven met behulp van de termen „boven" en „onder" (of „beneden") de X-as. Men zegt dus b.v. dat van een punt in den tweeden ruimtehoek de eerste en de tweede projectie beide boven de X-as liggen. Een enkele maal wordt hierbij opgemerkt, dat men ook wel van „voor" en „achter" de X-as kan spreken, namelijk, wanneer men zich het verticale

[1]) Met deze verwijzing bedoel ik niet, een plaats te noemen, waar men de bewijzen van deze soort onberispelijk aantreft; het aangeduide bewijs is bij al zijn lengte nog niet eens algemeen. Ik zou tans voor goede en duidelijke bewijzen kunnen verwijzen naar Wijdenes' Middel-Algebra, een boek, dat echter voor oudere leerlingen geschreven is.

projectievlak in het horizontale neergeslagen denkt inplaats van het laatste in het eerste. Veel minder ontmoet men echter de consequente toepassing van de opvatting, dat het vlak der constructieteekening twee, (bij gebruik van een derde projectievlak) drie verschillende projectievlakken voorstelt, die elk de plaatsaanduidingen van hun halve vlakken hebben behouden, welke zij in de ruimte bezaten. Volgens deze opvatting zegt men dus van een punt in den tweeden ruimtehoek, dat de eerste projectie achter, de tweede boven de X-as ligt.

Ik ben van meening, dat deze laatste handelwijze èn uit wetenschappelijk èn uit didactisch oogpunt de voorkeur boven de eerstgenoemde verdient. Wanneer men twee projectievlakken door wenteling doet samenvallen, heeft men een vlakke figuur, die echter twee conjectieve affien verwante platte vlakken voorstelt; er is dan echter geen enkele reden, om benamingen, die alleen voor een dezer twee vlakken zin hebben, op het andere toe te passen. Bovendien biedt echter de gewoonte, om voor elk dezer twee vlakken de daaraan in de ruimte toekomende benamingen te behouden, het voordeel, dat men het verband tusschen de constructieteekening en de ruimtelijke situatie veel levendiger kan doen beseffen. Wanneer een punt boven het horizontale en achter het verticale projectievlak ligt (kort aan te duiden als boven-achter), is gemakkelijk in te zien, dat de eerste projectie achter, de tweede boven de X-as ligt en daardoor is onmiddellijk bekend, hoe het punt in de constructieteekening er uitziet. Omgekeerd leest men op deze wijze de ruimtelijke ligging van het punt uit de constructieteekening af.

Het zal na het bovenstaande wel nauwelijks meer te hoeven worden betoogd, dat ik me niet kan vereenigen met de in sommige leerboeken gevolgde methode, om de rechte, waarmee in de constructieteekening de Z-as èn de Y-as (beschouwd als lijn van het horizontale projectievlak) samenvallen, de „nieuwe as" te noemen en den naam X-as mede toe te kennen aan de als lijn van het derde projectievlak beschouwde Y-as. Het inzicht in den samenhang van de constructieteekening met de ruimtefiguur wordt ook hier weer bevorderd, door in de eerste steeds de X-as, de Z-as en de twee standen van de Y-as uitdrukkelijk door letters aan te geven en daardoor onderling te onderscheiden. E. J. D.

XLVI. DE n^{de} MACHTSWORTEL. EEN VERZOEK OM INLICHTING.

Men hoort en leest nog vaak den term n^{de} *machtswortel* van a als uitspraak van $\sqrt[n]{a}$. De reden hiervan is niet duidelijk. Het lijkt althans veel redelijker, om van den n^{den} wortel van een getal te spreken, zooals men ook n^{de} macht zegt. In andere talen geschiedt dit ook: $n^{ième}$ racine, n^{te} Wurzel, radice n-esima, n^{th} root.

De eenige motiveering van de uitdrukking n^{de} machtswortel, die ik heb kunnen verzinnen, is deze, dat men er mee bedoelt: wortel van een als n^{de} macht beschouwd getal.

Wellicht bestaat er echter een betere verklaring, die tevens een verdediging zou kunnen zijn. Wie haar geven kan, zou mij verplichten, door haar mede te deelen. E. J. D.

BOEKBESPREKINGEN.

Wilhelm Lorey, *Der deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V.* 1891—1938. Verlag Otto Salle. Frankfurt am Main. 1938. 165 blz.

De oplossing van den Förderverein (aldus de gangbare benaming van de vereeniging, waarvan de officieele titel boven vermeld staat) in een ruimere nationaal-socialistisch organisatie heeft het laatst fungeerende bestuur aanleiding gegeven, een geschiedenis van haar werkzaamheid in het belang van het onderwijs in wiskunde en natuurwetenschappen te doen samenstellen. Deze taak is vervuld door den aan de lezers van dit tijdschrift niet onbekenden wiskundige Lorey, die er op uitmuntende wijze in geslaagd is, de zeer omvangrijke stof zoo te ordenen en weer te geven, dat er een aangenaam leesbaar en uitermate belangwekkend verhaal is ontstaan.

Belangwekkend niet alleen voor Duitsche lezers, maar ook voor ons. Telkens weer toch blijken in Duitschland, zij het vaak op andere tijdstippen als hier en in anderen samenhang, dezelfde kwesties ten aanzien van de plaats der wis- en natuurkundige wetenschappen in het voorbereidend hooger onderwijs en de problemen van hun didactiek aan de orde te zijn geweest als die ons hebben bezig gehouden of nog bezig houden; het is merkwaardig om te zien, hoe vaak de oplossing daarvan in dezelfde richting als bij ons is gezocht en gevonden.

Een bijzondere beteekenis bezit dit werkje nog voor hen, die, zooals schrijver dezes, eens het voorrecht hadden, een Tagung van den Förderverein mee te maken en die daaraan ongetwijfeld een aangename herinnering zullen bewaren.

Tegenover het vele aantrekkelijke, dat het werkje biedt, staat als

uiteraard onvermijdelijk bezwaar, dat de overgroote meerderheid der Nederlandsche lezers niet met instemming of zelfs maar met gelijkmoedigheid kennis zal kunnen nemen van menige passage, waarin de tegenwoordig in Duitschland overheerschende wereldbeschouwing al te duidelijk tot uiting komt.

We vermelden ten slotte nog, dat de schrijver in zijn Anmerkungen een bio- en bibliogafisch materiaal van grote waarde heeft bijeengebracht. E. J. D.

Dr. J. C. H. Gerretsen, Beginselen der Beschrijvende Meetkunde. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1940. 115 bldz., *f* 1,50.

Dit leerboek der beschrijvende meetkunde voor middelbare scholen neemt eene bijzondere plaats in onder zijne soortgenooten, en wel door zijn theoretisch karakter. De schrijver heeft gepoogd, de beschrijvende meetkunde op te heffen uit den halfslachtigen toestand van eenigszins theoretisch georiënteerd teekenen en haar te maken tot een exact behandeld onderdeel der wiskunde. Het werk, dat hiertoe te doen stond, ligt voor het grootste deel op het gebied van terminologie en formuleering.

Met veel ijver en nauwgezetheid heeft de schrijver zich gekweten van de taak, die hij zich heeft gesteld. Zoo vindt men definities of verklaringen in wiskundige termen van begrippen als „wentelen", „ruimtehoek", „boven", „voor"; de regels voor het stippelen van wat men „onzichtbare lijnen" noemde zijn exact geformuleerd. Door invoering van een begrip „algemeene stand" van lijnen en vlakken heeft de schrijver stellingen omtrent de ligging van figuren onderling en ten opzichte van de projectievlakken kunnen uitspreken zonder het gebruikelijke voorbehoud, gelegen in het gebruik van de woorden „in het algemeen". In het voorbericht noemt hij dit een „kleine terminologische kunstgreep". Daarmee doet hij ongetwijfeld te kort aan de beteekenis van dit deel van zijn werk. Immers hij spreekt stellingen uit, en wie het voorbehoud „in het algemeen" maakt, spreekt niets uit (tenzij hij achteraf aangeeft, welke bijzonderheden door deze woorden „in het algemeen" worden uitgesloten); bij het definieeren van algemeene standen van lijnen en vlakken geeft de schrijver natuurlijk aan, welke bijzondere standen worden uitgesloten.

Een enkele maal ontmoet men concessies aan de traditie, zoo b.v. waar de schrijver erkent, dat doorgangen van vlakken lijnen zijn, maar ze desniettemin „om redenen van duidelijkheid" als halve lijnen teekent. In het voorbericht zegt hij dat in het streven naar nauwkeurige formuleeringen verstandige beperking moet betracht worden. Deze opmerking is inderdaad verstandig: het bedrijven van wiskunde bij het onderwijs eischt nog steeds eenige verontschuldiging.

De behandeling van de derde projectie wijkt eenigszins af van de gebruikelijke, maar dit lijkt mij niet het meest essentieele van het werk.

De schrijver verdient dank voor zijn arbeid. Ik vertrouw, dat dit boek wel gebruikers zal vinden. Het zal den wiskundigen onder de wiskundeleeraren genoegen kunnen verschaffen, in ieder geval hun

veel ergernis bij het onderwijs in de beschrijvende meetkunde besparen.
J. H. S.

Paul de Vaere en V. Herbiet †, Grondslagen der Boldriehoeksmeting. Namen, Wesmael-Charlier, 1940. 87 bladzijden.

De boldriehoeksmeting wordt te onzent niet meer onderwezen op hoogere burgerscholen en gymnasia; dit is eenerzijds begrijpelijk, omdat ontaarding van dit vak in eene eindelooze vraagstukkenmakerij altijd als een gevaar dreigt, maar anderzijds jammer, daar belangrijke toepassingen der goniometrie op stereometrie en andere vakken niet tot haar recht kunnen komen.

Uit het voorbericht van het boekje van De Vaere en Herbiet lees ik nu, dat men er in België ook over denkt, de boldriehoeksmeting van het leerplan M.O. te schrappen. Maar dit is nog slechts een voornemen, welks verwezenlijking jaren op zich kan laten wachten, dat misschien ook niet tot verwezenlijking komt. Daarom is het boekje „Grondslagen der Boldriehoeksmeting" verschenen.

De inhoud komt overeen met wat in onze schoolboeken aan vlakkedriehoeksmeting wordt behandeld: afleiding van de formules, oplossing van driehoeken met bespreking, berekening van merkwaardige elementen, en meetkundige en andere toepassingen. De behandeling is nauwkeurig en duidelijk, zooals wij van de schrijvers gewend zijn. Het werk bevat 247 vraagstukken.

In het voorbericht wijdt de heer De Vaere eenige woorden aan de nagedachtenis van zijn medewerker Herbiet, die op 25 September 1939 te Namen is overleden.
J. H. S.

AANKONDIGING.

Een nieuwe Uitgave van MARTINUS NIJHOFF, uitgever, 's-Gravenhage.

Le tome premier vient de paraître de: JOURNAL TENU PAR ISAAC BEECKMAN de 1604 á 1634 publié avec une introduction et des notes par C. DE WAARD.

Un récit très connu nous expose les circonstances dans lesquelles Descartes-jeune, portant en 1618 les armes dans les Provinces-Unies, fit dans sa garnison de Bréda la connaissance de Beeckman. En effet tous les deux s'intéressaient aux mêmes questions de physique (cette science prise au sens le plus large); de leur rencontre naquit une amitié sincère, et l'on peut admettre que cette amitié a exercé une influence considérable sur les idées qui germaient dans l'esprit du Français, qui devait un jour être d'une si grande célébrité. Déjà à ce point de vue l'étude des papiers laissés par Beeckman, est d'une importance indiscutable, mais elle ne l'est pas seulement par rapport à ses relations avec le philosophe français. Par ses propres idées aussi, qu'il a notées pendant plusieurs années, Beeckman peut être nommé avec honneur parmi les cultivateurs de la science, non seulement parmi ceux des Pays-Bas,

mais encore ceux d'autres pays. Il résulte dès maintenant de diverses publications que c'était lui qui a connu et appliqué, comme un des premiers le principe d'inertie; qu'il a participé considérablement à la découverte de la loi de la chute des graves en l'exposant dans ses notes bien avant que Galilée publiât ses premières recherches sur cette loi, et qu'il a été le premier à formuler les lois du choc des corps mous, se fondant sur le principe de la conservation de la quantité de mouvement. D'ailleurs Beeckman est partisan de la théorie atomistique, à son époque généralement rejetée, et c'était cette hypothèse qui l'amena à admettre la pression de l'air se propageant dans tous les sens, longtemps avant les expériences de Torricelli, expériences dont la signification fut interprêtée faussement même encore plus tard. À l'opinion courante s'oppose aussi la conviction de Beeckman que la lumière se propagerait par une vitesse finie, ce qui ne fut confirmé que par les expériences de Römer en 1677. À ces questions exposées dans ses notes, se joignent encore plusieurs autres considérations ayant trait à la théorie de la musique ou à la médecine. En somme ces notes reflètent exactement les occupations de l'esprit d'un savant de cette époque importante. Non sans raison on a nommé Beeckman „un des esprits les plus importants parmi les physiciens hollandais" et „une figure intéressante et considérable".

Dès qu'il eut été retrouvé, en 1906, à la Bibliothèque provinciale à Middelbourg, le manuscrit de Beeckman a attiré l'attention de divers savants. M. Adam, après la mort de Paul Tannery le seul éditeur de la dernière grande publication des oeuvres de Descartes, s'empressa de faire connaitre son désir d'une publication intégrale. En effet une publication de ce genre fut alors projetée par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem qui en confia l'édition à M. de Waard. Malheureusement diverses circonstances ont empêché l'exécution du projet; une édition abrégée ne fut pas non plus réalisée, le tout au grand dépit des savants qui avaient connaissance du manuscrit, et qui continuaient à en réclamer une publication intégrale.

À l'heure qu'il est, l'éditeur Martinus Nijhoff de La Haye se propose de réaliser les voeux exprimés par des savants néerlandais et étrangers, et de donner la publication intégrale des notes de Beeckman. L'édition comprendra quatre volumes dont les trois premiers reproduiront le texte du manuscrit, tandis qu'un quatrième refermera des lettres et des documents, sans compter les tables des personnes mentionnées et des matières traitées. Le tout sera confié aux soins de M. de Waard, qui fera accompagner le texte d'un nombre limité de notes et d'indications bibliographiques.

L'édition intégrale du manuscrit se composera, comme il est indiqué ci-dessus, de 4 volumes d'environ 365 pages chacun, en format in-4to, uniforme à l'édition des oeuvres de Christiaan Huygens publiée par les soins de la Société Hollandaise des Sciences à Harlem. Le texte est pour la majeure partie en latin, accompagné de plusieurs facsimilés des dessins originaux; l'introduction, les notes, etc. seront en français.

L'édition a été tirée à 200 exemplaires numérotés à la main.

Le prix de souscription est fixé à 22,50 florins par volume relié en buckram; on souscrit à l'ouvrage complet. Après terminaison le prix sera porté à 100 florins pour un exemplaire relié en buckram.